

भूमिका

.....

अस्तीह गणित-गोलादिविविधविषयपूरितः श्रुतिपथप्रदर्शी ज्यौ-
तिषसिद्धान्तो भारतेऽन्यत्र च सुप्रसिद्धः सर्वेषां सिद्धविद्यानां पुरतः ।
सोऽयं क्रमशः सुखबोधाय गणितलाघवादिमाश्रित्य लब्धात्माभ्यु-
दय इदानीं वस्तुतोऽन्यान्यवेदाङ्गेषु शिथिलतां गतेष्वपि स्वचक्षुश्चा-
रितार्थं विशेषतो भजत एव ।

यतः स्थविरतां लभमानस्यापि तस्यावलोकनसामर्थ्यवर्धकं
यथार्थं नेत्रावरणमिवाभिनवाव्यक्तगणितज्यामितिकात्रिकोणमित्यादि
विषयजातम् । येन चिरसाध्यमपि तज्ज्ञानं त्वचिरसिद्धमिवेत्यवगम्य
त्रयाणां कोणानां मितिरित्यत्रोपचारात् त्रयाणां कोणानां मितेर्ज्ञापिका
कृतिरिति सरला प्रथमा प्रथमतो ज्यौतिषभूद्धरणधुरीणैः सर्वज्यौ-
तिषिकशिरोमणिभिः प्रियसिद्धान्तशिरोमणिभिर्महामहोपाध्यायैः श्री-
मद्भिः पण्डित-बापूदेवशास्त्रिभिरेव संकलय्य काश्यामेव ' मेडिकल-
हाल '—यन्त्रालयतः प्राकाशि ।

तत्समय एव विद्यमानैः सुप्रसिद्धसिद्धविद्यैर्ज्यौतिषसिद्धान्ततत्त्व-
विवेकमर्मज्ञैर्मैथिलभूसुरैः श्रीमद्भिः पण्डितनीलाम्बरशर्मभिर्ज्ञोपाभिधै-
र्विरचितः सरलत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितचापीयत्रिकोणमित्यादि-
नानाज्यौतिषसिद्धान्तीयविषयवासना-विकाशो ' गोलप्रकाशो ' नाम
ग्रन्थस्तैरेवोक्तशास्त्रिभिः स्वसंशोधकत्वेनादृतस्तस्मिन्नेव यन्त्रालये
प्रकाशितश्च ।

समयानुसारं सर्वत्र संस्कृतपरीक्षानियमे प्रस्तुते संप्रति विशे-
ष्टो रेखागणितत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितादिग्रन्थाः पिपठिषुभिः

(२)

सावधानतया ज्ञातुमभिलष्यन्ते तत्र बीजमेवाव्यक्तगणितं नव्यमव्यक्त-
मेव बहुधाऽतः प्रथमं तदव्यक्तमेव प्रकाशयामिति मन्यमानोऽहमादौ
सरलत्रिकोणमितिपुस्तकालाभात् श्रेष्ठिना बा. हरिदासगुप्तात्मजेन
श्रीहरिकृष्णदासगुप्तेन स्वीकृततन्मुद्रणव्ययादिना शोधयितुं प्रवर्तितो-
ऽभूवम् ।

यद्यपि सूर्यसिद्धान्तार्यभट्टसिद्धान्तपञ्चसिद्धान्तिकाब्रह्मस्फुटसि-
द्धान्तादिष्वपि जीवाकोटिज्योत्क्रमज्यातो धनर्णतत्तज्जनितसंस्कारा-
द्यवलोकनेन रेखागणितज्ञानमिवास्यापि ज्ञानं प्राचीनसमयादेवा-
स्त्येवाऽथोऽपि पाश्चात्यगणितवित्संकलितां नानाभिनवगणितवैचित्र्य-
चित्रितां बृहतीं तामेव सर्वां संकलय्य प्रकाशयितुमुत्कण्ठितोऽपि
गुरुजनकृतिसमुद्धरणव्रतलिप्सयाऽन्तरायित एतामेव सरलत्रिको-
णमिति संशोधयितुमारभेयम् ।

अत्र चत्वारोऽध्यायाः प्रक्रमपदवाच्याः सिद्धान्तनिययाश्च सन्ति
यत्र स्थानविशेषे ब्रह्मगुप्त-भास्कराचार्यादीनां ज्याकोटिज्यावृत्तान्त-
स्त्रिभुजचतुर्भुजफलवृत्तफलादिसाधननियामकाः श्लोका उपपद्यन्ते
तत्र २ ते २ श्लोकाश्च प्रतिपदोक्ता वर्तन्ते मध्येऽभ्यासार्थं कतिपयाः
प्रश्ना विशेषतश्चतुर्थाध्याये प्रघातमापकसंकेतेन कोणज्यादिमानसाधनं
वेधतः स्थानान्तरितवृक्षपर्वतोच्छ्रितिनदीविस्तारादिज्ञापका ग्रन्थान्ते
विंशतिः प्रश्नाश्च सुरक्षिताः ।

अत्र बहुत्र स्थलेषु यत्र २ जीवादिस्वरूपमात्रप्रदर्शनादेव प्रक-
माङ्गास्तत्र २ मया वाक्यतो बृहदक्षरैर्ज्ञापिताः । यत्र चास्मद्गुरुव-
राणां ज्यौतिषभास्कराणां गणिताद्वितीयानां महामहोपाध्यायपण्डित-
श्रीमत्सुधाकरद्विवेदिनां द्वित्रं पद्यमुपपद्यते तत्र २ टिप्पण्यां तदप्या-
दृतं तथाऽभ्यासार्थं ग्रन्थमध्यस्थप्रश्नानामुत्तराणि च सुलभं दर्शितानि ।
चतुर्थाध्यायस्थप्रघातमापकगणितावबोधकं नवीनगणितमप्यावश्यक-

(३)

त्वेन तत्र चतुर्थाध्यायात् प्रागेव निःक्षिप्तं तथा ग्रन्थान्ते रक्षितानां
विंशतेः प्रश्नानां सोपपत्तिकं कलासारण्यनुसारगणितप्रदर्शन—(लाग्रे-
थ्म = Logarithm) लघुरिक्थगणितपूर्वकमुत्तरं चान्ते निवेश्य
सर्वान्ते कतिचन प्रश्नाश्चान्येऽभ्यासार्थं धृताः सन्ति । एवं यथाबुद्धि-
विभवं संशोध्यापि “ भ्रान्तिर्मनुष्यधर्मः ”—इति नराभिमानाज्ञानाद-
क्षिचापल्यदोषतोऽवश्यं त्रुटिभागहमभीक्ष्णं शुद्धान्तःकरणान् गणित-
सिद्धान्तविदुषो मुहुः प्रार्थये ।

श्रीमुरलीधरझा मैथिलः ।



पुस्तकप्राप्तिस्थानम्

{

श्रीहरिकृष्णदास,
मालिक, “गुप्तबुक्डीपो”
‘कचौरीगली’ बनारस सिटी ।

शुद्धिपत्रम् ।



अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे पंक्तिः
मिष्टस्थाने	मिष्टस्थाने	५ १४
बमा ÷ कव	कमा ÷ कव	११ ४
$\left(\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	$\left(\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	१२ १३
—कोज्याक·ज्याक	—कोज्याअ·ज्याक	१८ १
कोज्या(अ-क)	कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ-क)	२१ १२
२कोज्या(अ+क)·ज्याअ- (अ-क)	२कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क)·ज्या $\frac{१}{२}$ - (अ-क)	२१ १३
त्रि ^२ +	त्रि ^२ +	२५ १
$\sqrt{\frac{\sqrt{१०+२}\sqrt{५}}{४}}$	$\sqrt{\frac{१०+२\sqrt{५}}{४}}$	३४ ३
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ५
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ६
प्रक्रमस्य	प्रक्रमस्य	३६ २०
$\frac{२स(स-अ)}{२कग}$	$\frac{२स(स-अ)}{कग}$	४३ ८
$\frac{२(स-क)(स-ग)}{२कग}$	$\frac{२(स-क)(स-ग)}{कग}$	४३ १०
व्यासाधयो-	व्यासार्धयो-	४८ १६
अ ^२ + घ ^२	अ ^२ + घ ^२	४६ १२
कोज्या ^२ $\frac{१}{२}$ गा	कग·ज्या ^२ $\frac{१}{२}$ गा	५३ १

अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे	पंक्ति
२ज्या२आ	ज्या२आ	५३	१७
संख्याकजु-	संख्याकर्ज-	५५	११
ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$, कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न} \times$ कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	५८	११
ज्या ^२ अ + ज्या ^२ अ	कोज्या ^२ अ + ज्या ^२ अ	७५	११
ज्या $६०^{\circ} + अ$)	ज्या $(६०^{\circ} + अ)$	८५	२३
इइदं धनमूलज्ञापकम्	इइदं धनमूलज्ञापकम्	८८	१६
लघु $१३\frac{१}{२}$	लघु $१३\frac{१}{२}$	९०	४
लघु $१ = १, ०'१, ००'१$	लघु $१ = ०, .०१, .००१$	९१	१०
$१० + प्रघादअ$	$१० + प्रघादअ$	९७	१७
कामनं	कामानं	१०२	६
- प्रघादज्याका	- प्रघादकोज्याका	११६	१८
अघ ^२ - अघ ^२	अच ^२ - अघ ^२	११८	६
मसंभावं	मसंभवं	१२०	१५

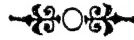


अथ

त्रिकोणमितिः ।

तत्र

प्रथमोऽध्यायः ।



नत्वेभास्यं वक्ष्ये त्रिकोणमितिनामकं गणिततन्त्रम् ।
यदवगमाद्भूखस्थं वस्तु स्याद्गणयितुं सुशकम् ॥ १ ॥

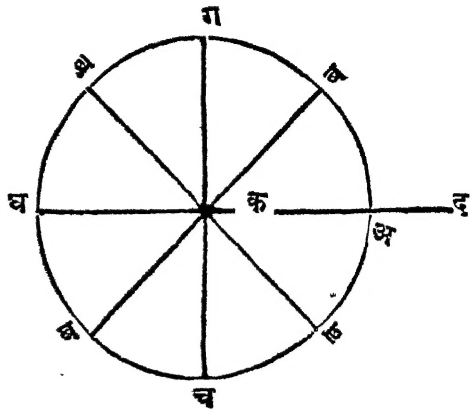
परिभाषाः ।

१ प्रक्रमः । त्रिकोणस्य त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति
षडवयवा * भवन्ति । तेषामवयवानामवगमकं तन्त्रं त्रि-
कोणमितिसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणगुणानां सम्यग्ज्ञाने कोणानां
भुजैः साकं यः सम्बन्धस्तस्य भुजानां च सम्यग्ज्ञानादत्र को-
णगुणा मुख्यत्वेन वर्ण्यन्ते ।

२ । संयुक्तैकप्रान्तयो रेखयोरन्योन्यप्रावण्यं क्षेत्रमितौ
कोणशब्देन व्यवह्रियते किन्त्विह त्रिकोणमितौ संयुक्तैकप्रान्तयो
रेखयोः संयुक्ताग्रे मिथो दृढं बद्ध्वा पूर्वमेकां रेखामपरस्यां
निधाय तस्यां निहितरेखायामेकस्मिन्नेव भूतले भ्रमितायां
तद्रेखया यावान् प्रदेशोऽतिक्रम्यते तावान् कोणसंज्ञः स्यात् ।

❀ त्रिभुजस्य फलमपीति सप्तावयवैर्भवितव्यम् ।

यथाऽत्र किल कद
आधाररेखा । क रेखयोः
संयोगविन्दुः । तथा
कोणोत्पत्त्यै पूर्वं या
रेखा कद-रेखायां नि-
धाय एकस्मिन्नेव भूतले
भ्राम्यते सा कव । तदा-
ऽस्या रेखाया भ्रमणे-
न संजात अकव-
कोणश्चैकोणमितिक
उच्यते । क्षेत्रमिति-



सम्बन्धी कोणः समकोणद्वयादधिको न भवति परन्तु त्रिकोणमिति-
सम्बन्धी ततोऽप्यधिको यथेष्टं महान् जायते । अथ यदि क-केन्द्रमभितः
कअ इष्टव्यासार्वेनैकम् अगघच वृत्तं क्रियते तदा अकव-कोणसंमुख-
चापः क्षेत्रमितावर्धपरिधेरधिको न भवति किन्त्वत्र स चापः परि-
धेरप्यधिको यथेष्टं भवितुमर्हति ।

३ । क-विन्दौ यथायथा अकव-कोणो वर्धते तथातथा
तत्संमुखचापो वर्धते । अतः प्रतिसमकोणसंमुखचापः परिधि-
चतुर्थांशो भवति । अयमेव पदसंज्ञः ।

यथोर्ध्वक्षेत्रे अघ-व्यासे क-केन्द्रे गच-लम्बकरणेन संजातानां
चतुर्णां समकोणानां संमुखाः क्रमेण अग, गघ, घच, चअ चापाः
पदाख्याः स्युः । अत एवैकस्मिन् पदे समकोणे च समाना एव नव-
तितुल्या भागा अंशसंज्ञाः कल्प्यन्ते । तथोभयत्रैकैकस्मिन्नंशे षष्टिस्तु-
ल्यभागाः कलासंज्ञाः कल्प्यन्ते । एकैकस्यां कलायां च षष्टिरेव तुल्य-
भागा विकलाख्याः कल्प्यन्ते । अथैतेषामंशकलाविकलासंज्ञकभागानां
मानसंख्याद्योतनाय तत्तत्संख्याङ्कोपरि दक्षिणभागे क्रमेण °, ', ''
एतानि चिह्नानि लिख्यन्ते । यथा पञ्चविंशतिरंशाश्चत्वारिंशत् कलाः
षट्पञ्चाशद्विकलाश्चैतेषां द्योतनाय २५°, ४०', ५६'' एवं लिख्यन्ते ।

४ । यदि केनचित् कोणेन तत्संमुखचापो लभ्यते तदा-
ऽन्येन कोणेन किमित्यनुपातेन तत्संमुखचापो लभ्यत इति
क्षेत्रमितौ षष्ठाध्याये त्रयस्त्रिंशी प्रतिज्ञोपपादिताऽस्ति तयेदम-
वगम्यते ।

(१) कोणतत्संमुखचापयोरंशादिसंख्या समैव भवति ।

(२) निर्दिष्टचापदैर्घ्यात् तच्चापसंमुखकेन्द्रलग्नकोणस्यांशादि
मानमवगन्तुं शक्यत इति ।

५ । (२ प्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम्) कद-आधाररेखामारभ्य
कब-रेखाया भ्रमणेन संजातः अकब-कोणो यदा समकोणा-
न्यूनो भवति तदा स आद्यसमकोणीय उच्यते तत्संमुखचा-
पश्चाद्यपदीयः । यदा स कोण एकसमकोणादधिकः समकोण-
द्वयान्यूनस्तदा स द्वितीयसमकोणीय उच्यते तत्संमुखाचापश्च
द्वितीयपदीयः । एवमग्रेऽपि ।

६ । कद-आधाररेखातः कब-रेखा यथायथाऽनुलोमं
भ्रमति तथातथा अकब-कोणो वर्धतेऽतः सा यथायथा विलोमं
भ्रमेत् तथातथा स कोणो ह्रासमियादिति तु स्पष्टतरम् । अत
एव चतुर्थसमकोणान्तःपाती अकब-कोण ऋणं भवति ।
कब-रेखाया विलोमभ्रमेण तत्कोणोत्पत्तेः । अत एव तत्कोण-
संमुखः अब-चापोऽपि ऋणं भवति ।

७ । यस्मात् कस्माच्चिदपि चापात् कोणाद्वा पदं समकोणो
वा यावदतिरिच्यते तावती तच्चापस्य कोणस्य वा कोटिः स्यात् ।

यथा-(२ प्र०क्षे०द्र०) अब-चापस्य अकब-कोणस्य वा बग-चापः

बकग-कोणो वा कोटिः स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने नवतेः शोधिते तयोः कोटिमानमवशिष्यते । यथा- 23° , $15'$, $45''$ । अस्य कोटिः 66° , $48'$, $15''$ ।

अनु० (१) नवत्यधिकस्य चापस्य कोणस्य वा कोटी ऋणं भवति ।

अनु० (२) जात्यत्र्यस्य लघुकोणयोर्योगस्य नवतितुल्यत्वात् तयोरेकोऽपरस्य कोटिर्भवति ।

८ । यस्मात् कस्माच्चिच्चापात् कोणाद्वा परिध्यर्थं समकोणद्वयं वा यावताऽधिकं तावत् तच्चापस्य कोणस्य वा स्पर्धिसंज्ञं स्यात् ।

यथा-(२ प्र. क्षे. द्र.) अब-चापस्य अकब-कोणस्य वा बघ-चापः बकब-कोणो वा स्पर्धी स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने साशीतिशताच्छोधिते तयोः स्पर्धिचापकोणाववशिष्येते ।

यथा- 45° , $35'$, $40''$ । अस्य स्पर्धी= 128° , $28'$, $20''$ ।

अनु० (१) साशीतिशताधिकस्य चापस्य कोणस्य वा स्पर्धी ऋणं भवति ।

अनु० (२) त्र्यस्यमात्रे कोणत्रययोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् त्र्यस्यैककोणस्यापरकोणद्वययोगः स्पर्धी भवति ।

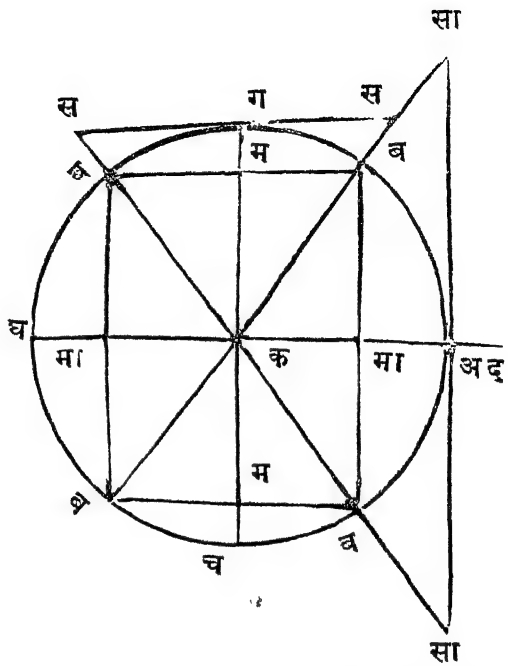
९ । अथ चापकोणयोः सम्बन्धिनः कतिचन पदार्थाः कथ्यन्ते । तत्र चापसम्बन्धिनः पदार्थाश्चापीया उच्यन्ते कोणसम्बन्धिनश्च कोणीयाः ।

जीवादिपरिभाषाः ।

(१) चापस्यैकप्रान्ताद्व्यासं कृत्वा द्वितीयप्रान्तात् तद्व्यासोपरि कृतो लम्बस्तच्चापस्य ज्या स्यात् ।

यथा-कल्प्य० कद्-आधाररेखा । यस्या मूलं क-बिन्दुः । तं केन्द्रं

कृत्वा कअ-इष्टव्या-
सार्धेन अगवच वृ-
त्तं कार्यम् । अघ-
गच व्यासौ च-मि-
थो लम्बरूपौ विधे-
यौ । तदा यदि अव-
इष्टचापः स्यात् य-
स्य एकमग्रं अ-वि-
न्दौ द्वितीयं च च-
तुर्णां पदानामन्य-
तमस्यान्तर्गतं स्या-
त् तदा तस्य ज्या
बमा भवेत् ।



(२) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्याने बिन्दुं कृत्वा
तस्मादपरस्यां कृतालम्बात् कोणेष्विन्द्रन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य
ज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणोत्पादकयोः कद-कसा-रेखयोः कद-रेखायां
कसा-रेखायाः ब-बिन्दोर्यदि बमा-लम्बः क्रियते तदा अकव-कोणस्य

ज्या = $\frac{\text{बमा}}{\text{कव}}$ स्यात् । यदि सा-बिन्दोः साअ-लम्बः क्रियते तदा अकव-

कोणस्य ज्या = $\frac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$ स्यात् इयं पूर्वतुल्यैव ।

(३) चापस्यैकप्रान्तात् कृते व्यासे यो लम्बरूपोऽन्यो
व्यासस्तस्मिन् चापापरप्रान्तात् कृतो लम्बस्तच्चापस्य कोटि-
ज्या स्यात् । तच्चापस्य या कोटिस्तस्या ज्येत्यर्थः । इयं ज्या-
मूलस्य केन्द्रस्य चान्तरेण तुल्या भवति ।

यथा—अव-चापस्य वम कमा च कोटिज्या ।

(४) कोणोत्पादकरेखयोः कस्यां चिदेकतरस्यां स्थिता-
दिष्टबिन्दोरपरस्यां कृतस्य लम्बस्य कोणबिन्दोश्चान्तरात् कोणे-
ष्टबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य कोटिज्या स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य कोटिज्या = $\frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ स्यात् ।

(५) चापस्यैकं प्रान्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रापरप्रान्तलग्न-
रेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

(६) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्थाने बिन्दुं
प्रकल्प्य तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बाल्लम्बमूलकोणबिन्द्वन्तरेणाप्तं
तत्कोणस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य स्पर्शरेखा = $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$ स्यात् ।

(७) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्ताद्दृष्टं
स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रचापापरप्रान्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा
तच्चापस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य गस कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

(८) कोणस्य स्पर्शरेखाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन
यत् संपद्यते तत् कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—पूर्वसिद्धा अकब-कोणस्य स्पर्शरेखा = $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$ ।

∴ अकब-कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा = $\frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{अक}}{\text{असा}}$ ।

(९) चापस्यैकप्रान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः

केन्द्रान्निर्गता चापापरप्रान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अब-चापस्य कसा छेदनरेखा ।

(१०) कोणस्य कोटिज्याया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य कोटिज्या $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ ।

∴ छेदनरेखा $= \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{कअ}}$ ।

(११) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तात् कृता यां स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापरप्रान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अब-चापस्य कस कोटिच्छेदनरेखा ।

(१२) कोणस्य जीवाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् तत्कोणस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकब-कोणस्य ज्या $= \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$ ।

∴ कोटिच्छेदनरेखा $= \frac{\text{कब}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{असा}}$ ।

(१३) चापजीवामूलयोर्मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चाप-स्योत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अब-चापस्य अमा उत्क्रमज्या स्यात् ।

(१४) कोणस्य कोटिज्ययोनं रूपं तत्कोणस्योत्क्रमज्या स्यात् ।

$$\text{यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या} = \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}} ।$$

$$\therefore \text{उत्क्रमज्या} = 1 - \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}} ।$$

(१५) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तस्य कोटिमूलस्य च मध्ये यद्वासखण्डं तत् तच्चापस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् । यथा अव-चापस्य गम-कोट्युत्क्रमज्या ।

(१६) कोणस्य जीवया हीनं रूपं तत्कोणस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् ।

$$\text{यथा—अकव-कोणस्य ज्या} = \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}} ।$$

$$\therefore \text{कोट्युत्क्रमज्या} = 1 - \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{असा}}{\text{कसा}} ।$$

१० । यदि (अ) इदं कस्यचिच्चापस्य कोणस्य वा द्योतकं स्यात् तदाऽस्य ज्यादयः क्रमेणैवं लिख्यन्ते । ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ, कोस्पअ, छेअ, कोछेअ, उअ, कोउअ । अत एव ज्याअ अस्य वर्गः = (ज्याअ)^२ । कोज्याअ अस्य घनः = (कोज्याअ)^३ इत्यादि स्यात् । परमत्र प्रायो लाघवार्थं ज्या^३अ, कोज्या^३अ इत्यादि, एवमेव लिख्यते । यद्यपि ज्या^३अ इत्यादीनां स्थानविशेषेऽर्थोऽन्यथा कल्प्यते ।

११ । चापीयाः कोणीया वा जीवादयः पदविशेषे समकोण-विशेषे वा ऋणत्वं प्राप्नुवन्ति । यथा—(९ प्र. क्षे. द्रष्टव्यम्) अव-चापस्य वमा ज्या प्रथमद्वितीयपदयोर्धनगताऽस्ति किन्तु तृतीयचतुर्थपदयोर्दिग्वैपरीत्याहणगता भवति । एवं अकव-

कोणस्यापि ज्या प्रथमद्वितीयसमकोणयोर्धनगता किन्तु तृतीयचतुर्थयोर्लम्बस्य दिग्वैपरीत्याट्टणगता भवति ।

एवं प्रतिपदं प्रतिसमकोणं वा जीवादीनां प्रत्येकं धनर्णत्वं निश्चित्य तदवगमायेदं चक्रं लिख्यते ।

पदाङ्काः समकोणाङ्का वा

चापीयाः कोणीया वा पदार्थाः	१	२	३	४
ज्या	+	+	-	-
कोटिज्या	+	-	-	+
स्पर्शरेखा	+	-	+	-
कोटिस्पर्शरेखा	+	-	+	-
छेदनरेखा	+	-	-	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	-	-
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

क्षेत्रे छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्दिगानुलोम्यप्रातिलोम्ये न सम्यगुपलक्ष्येते अतस्तयोर्धनर्णत्वावगमायान्यथा यत्यते ।

$$\therefore \text{कव} : \text{कमा} :: \text{कसा} : \text{कअ} \therefore \text{कसा} = \frac{\text{कव} \times \text{कअ}}{\text{कमा}} ।$$

अत्र यदि भव-चापस्य द्योतकं अ स्यात् ।

$$\text{तदा छेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{एवं कोछेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्याअ}} ।$$

एवं यदि अकव-कोणस्य द्योतकं अ स्यात् । तदा—

$$\text{छेअ} = \frac{\text{वक}}{\text{कमा}} = \frac{१}{\frac{\text{कमा}}{\text{कव}}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{वमा}} = \frac{१}{\frac{\text{वमा}}{\text{कव}}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} ।$$

एतेन चापस्य कोणस्य वा छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्धनर्णत्वं क्रमेण कोटिज्याज्ययोरिव भवतीति स्फुटमवगम्यते ।

१२ । प्रतिसमकोणादि कोणीयज्यादीनां मानं प्रतिपदादि चापीयज्यादीनां मानं वा नवमप्रक्रमस्थक्षेत्रदर्शनेन शीघ्रमवगम्यते ।

बालावबोधाय तद्विलिख्य प्रदर्श्यते ।

कोणीयाश्चापीया वा ज्यादयः	अ वा ०°	ग ९०°	घ १८०°	च २७०°
ज्या	०	१	०	-१
कोटिज्या	१	०	-१	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	-१	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	-१
उत्क्रमज्या	०	१	२	१
कोट्युत्क्रमज्या	१	०	१	२

अत्र कब-त्रिज्यां रूपं प्रकल्प्य चापीयज्यादीनां मानं लिखितमस्तीति बोध्यम् ।

१३ । अथ नवमप्रक्रमोक्तसंज्ञानां सम्यग्ज्ञानाय कोणीयज्यादीनां कतिचन मिथः सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते ।

(९ प्र-क्षेत्रदर्शनम्) कल्प्यते अ=∠अकब तदा—

$$(१) \quad \text{ज्याअ} = \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{बमा} \cdot \text{बमा}}{\text{कब} \cdot \text{बमा}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$(२) \quad \text{कोज्याअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कमा}}{\text{कव} \div \text{कमा}} = \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(३) \quad \text{स्पअ} = \frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{वमा} \div \text{कव}}{\text{कमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

$$(४) \quad \text{कोस्पअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{१}{\text{स्पअ}} ।$$

$$(५) \quad \text{छेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$(६) \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} ।$$

$$(७) \quad \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(८) \quad \text{कोउअ} = १ - \text{ज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$(९) \quad \text{ज्या}^२\text{अ} + \text{कोज्या}^२\text{अ} = \left(\frac{\text{वमा}}{\text{कव}} \right)^२ + \left(\frac{\text{कमा}}{\text{कव}} \right)^२$$

$$= \frac{\text{वमा}^२ + \text{कमा}^२}{\text{कव}^२} = \frac{\text{कव}^२}{\text{कव}^२} = १ ।$$

∴ ज्या^२अ = १ - कोज्या^२अ । कोज्या^२अ = १ - ज्या^२अ ।

१४ । अथ कोणीयज्यादीनां क्रमेण चापीयज्यादिभिर्यः
संबन्धः स प्रदर्श्यते ।

यदि अ-कोणस्य संमुखचापः आ स्यात् तदा (९ प्र. क्षे. द्र.) ।

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{बसा}}{\text{कव}} = \text{ज्याअ} \therefore \text{ज्याआ} = \text{त्रि. ज्याअ} ।$$

तत्र यदि त्रि = १ तदा ज्याआ = ज्याअ । एवं कोटिज्यादिष्वपि ।

अनेनेदमवगम्यते । कोणीयजीवादयो रूपव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवमिष्टव्यासार्धेन गुणितास्ता इष्टव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवं गुणविपर्ययेण चापीयाभ्यः कोणीया भवन्तीति ।

१५ । (अनु०) यदि कस्मिंश्चित् त्रैकोणमितिके राशौ समीकरणे वा स्थिताः कोणीया जीवादय इष्टव्यासार्धे चापीयत्वेनापेक्षितास्तदा तासु कोणीयज्यादिषु इष्टव्यासार्धमिते त्रिहरे कल्पिते ताश्चापीया भवन्ति ।

यथा—ज्या^२अ + कोज्या^२अ = १ अत्रत्यज्याकोटिज्ययोः क्रमेण

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}, \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \text{ आभ्यामुत्थापितयोः }$$

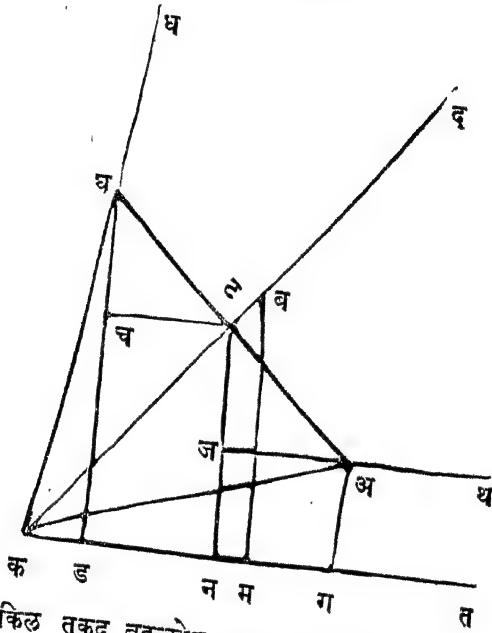
$$\left(\frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 = १, \text{ एवं सिद्धयति ।}$$

$\therefore \text{ज्या}^2\text{आ} + \text{कोज्या}^2\text{आ} = \text{त्रि}^2$ । एवमत्र ज्याकोटिज्ये चापीये सिद्धे ।

अध्यायः २

अत्र कोणानां योगान्तरज्यादिसाधनं ज्यादिसंबन्धियोगान्तरव-
धफलानां मानानि चार्धांशज्याकोटिज्यानयनं ज्यादीनां मानानां वै-
चित्र्यं निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पा-
दनप्रकारश्चेति प्रोच्यते ।

१६ । अथ द्वयोः कोणयोज्याभ्यां कोटिज्याभ्यां च तत्कोणद्वयैक्यान्तरज्याकोटिज्यासाधनम् ।



अत्र किल तद्वृहत्कोणः = अ । दक्ष लघुकोणः = क ।
 अनयोर्द्वयोरपि कोणबिन्दुः क एव, तदा \angle तदक्ष = अ + क । एवं
 कक्ष-रेखायां कापि घ-बिन्दुः कार्यः । कक्ष-रेखायां घट-लम्बः कार्यः ।
 स च अ-पर्यन्तं तथा वर्धनीयो यथा टअ = घट स्यात् । कअ-रेखा
 थ-पर्यन्तं कार्या तदा कअ = कक्ष । अथ च \angle थकक्ष = क भवेत् ।

$\therefore \angle$ तदक्ष = अ - क स्यात् । एवं कक्ष-रेखातः कक्ष-तुल्या कक्ष-
 रेखा पृथक् कार्या । कक्ष-रेखायां घ, ट, व, अ बिन्दुभ्यः क्रमेण घड,
 टन, वम, अग लम्बाः कार्याः । अ, ट बिन्दुभ्यां च क्रमेण टन, घड,
 रेखायोः अज, टच लम्बाः कार्याः तदा घचट, टजअ त्रिभुजे
 सर्वांशैस्तुल्ये भवतः ।

∴ घच = टज, चट = जअ । एते त्रिभुजे, कटन, कवम त्रिभुजे
चैतानि मिथः सजातीयानि भवन्ति ।

$$\text{एवं, ज्याअ} = \frac{\text{वम}}{\text{कव}} \quad \text{ज्याक} = \frac{\text{घट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कम}}{\text{कव}} \quad \text{कोज्याक} = \frac{\text{कट}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{तथा । ज्या (अ+क)} = \frac{\text{घड}}{\text{कघ}} = \frac{\text{घड}}{\text{कव}} \quad \text{ज्या (अ-क)} = \frac{\text{अग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{अग}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{कोज्या (अ+क)} = \frac{\text{कड}}{\text{कघ}} = \frac{\text{कड}}{\text{कव}} \quad \text{कोज्या (अ-क)} = \frac{\text{कग}}{\text{कअ}} = \frac{\text{कग}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{एवं, घड} = \text{चड} + \text{घच} = \text{टन} + \text{घच} \quad |$$

$$\text{अग} = \text{टन} - \text{टज} = \text{टन} - \text{घच} \quad |$$

$$\text{कड} = \text{कन} - \text{डन} = \text{कन} - \text{चट} \quad |$$

$$\text{कग} = \text{कन} + \text{नग} = \text{कन} + \text{अज} = \text{कन} + \text{चट} \quad |$$

$$\text{ततस्त्रिभुजसाजात्यान्,} \quad \frac{\text{टन}}{\text{कट}} = \frac{\text{वम}}{\text{कव}} = \frac{\text{चट}}{\text{घट}} \quad |$$

$$\text{टन} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} \quad \text{चट} = \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\frac{\text{घच}}{\text{घट}} = \frac{\text{कम}}{\text{कव}} = \frac{\text{कन}}{\text{कट}} \quad \therefore \text{घच} = \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \quad | \text{ तथा, कन} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{तथा च, घड} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \quad \therefore \frac{\text{घड}}{\text{कव}} = \frac{\text{वम}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{कम}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{घट}}{\text{कव}} \quad |$$

$$\text{अग} = \frac{\text{वम. कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{कम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{अग}}{\text{कव}} = \frac{\text{वम. कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कम. घट}}{\text{कव}} - \frac{\text{कम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{अग}}{\text{कव}}$$

$$\text{कड} = \frac{\text{कम. कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कड}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम. कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} - \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कड}}{\text{कव}}$$

$$\text{कग} = \frac{\text{कम. कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कग}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम. कट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} + \frac{\text{वम. घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कग}}{\text{कव}}$$

$$\therefore \text{ज्या (अ + क)} = \text{ज्याअ. कोज्याक} + \text{कोज्याअ. ज्याक} \quad (१)$$

$$\text{ज्या (अ - क)} = \text{ज्याअ. कोज्याक} - \text{कोज्याअ. ज्याक} \quad (२)$$

$$\text{कोज्या (अ + क)} = \text{कोज्याअ. कोज्याक} - \text{ज्याअ. ज्याक} \quad (३)$$

$$\text{कोज्या (अ - क)} = \text{कोज्याअ. कोज्याक} + \text{ज्याअ. ज्याक} \quad (४)$$

एतदानयनं क-कोणं अ-कोणाल्लघुं प्रकल्प्य (अ + क) कोणं च समकोणान्यूनं प्रकल्प्य कृतं किन्तु क-कोणस्य अ-कोणादधिकत्वे (अ + क) कोणस्य च समकोणादधिकत्वे चौत्तरीत्या कोणैक्यान्तरज्याकोटिज्ये पूर्वसाधिते एव सम्पद्यते ।

१७ । अनु० । अनन्तरप्रक्रमस्थ—(२, ४) समीकरणयोः यदि अ-कोणः शून्यं कल्प्येत तदा—

$$\text{ज्या (- क)} = - \text{ज्याक} \quad \text{कोज्या (- क)} = \text{कोज्याक} \quad ।$$

अनेनेदमवगम्यते । ऋणगतकोणस्य ज्या ऋणं भवति कोटिज्या च धनं भवतीति ।

$$\text{अत एव स्प (- क)} = \frac{\text{ज्या (- क)}}{\text{कोज्या (- क)}} = \frac{-\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} = - \text{स्पक} \quad ।$$

$$\begin{aligned} \text{एवमेव कोस्प (- क)} &= -\text{कोस्पक} \quad । \quad \text{छे (- क)} = \text{छेक} \quad । \\ \text{कोछे (- क)} &= - \text{कोछेक} \quad । \quad \text{उ (- क)} = \text{उक} \quad । \end{aligned}$$

$$\text{कोउ (- क)} = २ - \text{कोउक} \quad ।$$

१८ । अनु० । यदि १६ प्रक्रमे (२, ४) अनयोरेव
अ = १८०° स्युः । तदा—

$$\text{ज्या } (१८०^{\circ}-क) = \text{ज्या } १८०^{\circ} \times \text{कोज्याक} - \text{कोज्या } १८०^{\circ} \times \text{ज्याक ।} \\ (१२ प्र०) = ० \times \text{कोज्याक} + १ \times \text{ज्याक} = \text{ज्याक ।}$$

$$\text{कोज्या } (१८०^{\circ}-क) = \text{कोज्या } १८०^{\circ} \times \text{कोज्याक} + \text{ज्या } १८०^{\circ} \times \text{ज्याक} \\ = -१ \times \text{कोज्याक} + \text{ज्या } ० \times \text{ज्याक} = -\text{कोज्याक ।}$$

अनेनेदमवगम्यते । कोणस्य ज्या तद्धीनसमकोणद्वयस्य ज्याया
तुल्या भवति । कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या च तत्कोणकोटिज्यया
ऋणगतया तुल्या भवतीति ।

$$\text{अत एव स्प } (१८०^{\circ}-क) = \frac{\text{ज्या } (१८०^{\circ}-क)}{\text{कोज्या } (१८०^{\circ}-क)} = \frac{\text{ज्याक}}{-\text{कोज्याक}} = -\text{स्पक ।}$$

$$\text{एवमेव कोस्प } (१८०^{\circ}-क) = -\text{कोस्पक । छे } (१८०^{\circ}-क) = -\text{छेक ।}$$

$$\text{एवं } \therefore \text{ज्या } (अ+क) = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक ।}$$

$$\text{तथा कोज्या } (अ+क) = \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक ।}$$

$$\therefore \text{ यदि अ} = ९०^{\circ} \text{ तदा } \text{ज्या } (९०^{\circ}+क) = \text{कोज्याक ।}$$

$$\text{तथा कोज्या } (९०^{\circ}+क) = -\text{ज्याक ।}$$

$$\text{एवं यदि अ} = १८०^{\circ} \text{ तदा } \text{ज्या } (१८०^{\circ}+क) = -\text{ज्याक ।}$$

$$\text{कोज्या } (१८०^{\circ}+क) = -\text{कोज्याक}$$

१९ । षोडशप्रक्रमोक्तानि (१, २, ३, ४), एतानि
समीकरणानि यदीष्टव्यासार्धे चापीयान्यपेक्षितानि स्युस्तदा
(प्र० १५) रीत्या ।

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore \text{ज्या (अ + क)} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवमेव ज्या (अ - क)} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीभास्कराचार्यः सिद्धान्तशिरोमणेरन्यज्योत्पत्तौ-

“चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते ।

त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चपैक्यस्य दोर्ज्यका ॥

चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसंमिता”-इति ।

$$\text{एवम् } \frac{\text{कोज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore \text{कोज्या (अ + क)} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवम् कोज्या (अ - क)} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीकमलाकरभट्टस्तत्त्वविवेकस्पष्टाधिकारे ज्योत्पत्तौ-

“दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्योश्च घातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः ।

वियोगयोगौ जीवे स्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे”-इति ॥

२० । अथ चापद्वययोगान्तरस्पर्शरेखादिस्वरूपम् ।

यतः

$$- (\text{अ + क}) = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक} । (१)$$

ज्या (अ - क) = ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक । (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ . कोज्याक - ज्याअ . ज्याक । (३)

कोज्या (अ - क) = कोज्याअ . कोज्याक + ज्याअ . ज्याक । (४)

अतः (१) (२) अनयोः (३) (४) अनयोश्च पृथक् योगान्तराभ्याम्

ज्या (अ + क) + ज्या (अ - क) = २ ज्याअ . कोज्याक ।

ज्या (अ + क) - ज्या (अ - क) = २ कोज्याअ . ज्याक ।

कोज्या (अ + क) + कोज्या (अ - क) = २ कोज्याअ . कोज्याक ।

कोज्या (अ - क) - कोज्या (अ + क) = २ ज्याअ . ज्याक ।

एवम् (१) (२) अनयोर्वधतः

ज्या (अ+क) . ज्या (अ-क) = ज्या^२अ . कोज्या^२क - कोज्या^२अ . ज्या^२क

= ज्या^२अ (१ - ज्या^२क) - (१ - ज्या^२अ) ज्या^२क

= ज्या^२अ - ज्या^२अ . ज्या^२क - ज्या^२क + ज्या^२अ . ज्या^२क

= ज्या^२अ - ज्या^२क = (ज्याअ + ज्याक) (ज्याअ - ज्याक)

= १ - कोज्या^२अ - (१ - कोज्या^२क) = कोज्या^२क - कोज्या^२अ

= (कोज्याअ + कोज्याक) (कोज्याक - कोज्याअ) ।

एवमेव (३) (४) अनयोर्वधतः कोज्या (अ+क) . कोज्या (अ-क)

= कोज्या^२अ . कोज्या^२क - ज्या^२अ . ज्या^२क

= (१ - ज्या^२अ) कोज्या^२क - ज्या^२अ (१ - कोज्या^२क)

= कोज्या^२क - ज्या^२अ = (कोज्याक + ज्याअ) (कोज्याक - ज्याअ)

= १ - ज्या^२क - १ + कोज्या^२अ = कोज्या^२अ - ज्या^२क

= (कोज्याअ + ज्याक) . (कोज्याअ - ज्याक) ।

एवम् (१) अस्मिन् (२) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{ज्या (अ - क)}} = \frac{\text{ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक}}{\text{ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ - \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$

एवमेव $\frac{\text{कोज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ-क)}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पक} + \text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}$$

$$= \frac{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}$$

एवम् (१) अस्मिन् (३) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ+क)}} = \text{स्प (अ+क)} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}} ।$$

एवमेव (२) अस्मिन् (४) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\text{स्प(अ-क)} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}} = \frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}} ।$$

२१ । ज्याकोटिज्ययोः स्वरूपान्तरं प्रदर्श्यते ।

कल्प्यते अ = प + फ, क = प - फ,

∴ प = ½ (अ + क), फ = ½ (अ - क),

∴ ज्याअ = ज्या (प + फ) = ज्याप . कोज्याफ + कोज्याप . ज्याफ
= ज्या ½ (अ + क) . कोज्या ½ (अ - क)

+ कोज्या ½ (अ + क) . ज्या ½ (अ - क) = (आ) ।

एवमेव ज्याक

= ज्या ½ (अ + क) . कोज्या ½ (अ - क)

- कोज्या ½ (अ + क) . ज्या ½ (अ - क) = (का) ।

कोज्याअ

= कोज्या ½ (अ + क) . कोज्या ½ (अ - क)

- ज्या ½ (अ + क) . ज्या ½ (अ - क) = (गा) ।

कोज्याक

= कोज्या ½ (अ + क) . कोज्या ½ (अ - क)

+ ज्या ½ (अ + क) . ज्या ½ (अ - क) = (घा) ।

२२ । अनेन ज्ययोः कोटिज्ययोश्च योगान्तरे प्रदर्श्यते ।

(आ) (का) अनयोः (गा) (घा) अनयोश्च पृथग्योगा-
न्तराभ्यां सिद्धम्—

ज्याअ + ज्याक

$$= \text{ॐ } २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (पा) ।$$

ज्याअ - ज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (फा) ।$$

कोज्याअ + कोज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (बा) ।$$

कोज्याक - कोज्याअ

$$= \dagger २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (भा) ।$$

(१) (पा) अस्मिन् (फा) अनेन भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}} = \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ+क) \cdot \text{कोज्या } \frac{१}{२} (अ-क)}{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ+क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ-क)}$$

ॐ अत इष्टव्यासार्धे परिणामिते ज्याअ + ज्याक

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } (अ - क)}{\text{त्रि}} \mid \text{ज्याअ} - \text{ज्याक}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या } (अ + क) \text{ ज्याअ } (अ - क)}{\text{त्रि}} \mid \text{अतः}$$

“चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटिज्यकाहते ।

मिथस्त्रिज्याहते द्विज्यौ चापज्यावियुतिर्युतिः” ।

इति विशेषोक्तमुपपद्यते ।

† अत्रापीष्टव्यासार्धे परिणामनेन

“चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटिज्ययोर्हतिः ।

द्विगुणा त्रिगुणाप्ता च कोटिज्यावियुतिर्युतिः ” ॥

इदमपि विशेषोक्तमुपपद्यते ।

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (अ + क)}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ + क)} \times \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}$$

$$= \text{स्प } \frac{1}{2} (अ + क) \times \text{कोस्प } \frac{1}{2} (अ - क)$$

$$= \text{स्प } \frac{1}{2} (अ + क) \times \frac{1}{\text{स्प } \frac{1}{2} (अ - क)}$$

$$= \frac{\text{स्प } \frac{1}{2} (अ + क)}{\text{स्प } \frac{1}{2} (अ - क)} ।$$

(२) (वा) अस्मिन् (भा) भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (अ + क) \cdot \text{कोस्प } \frac{1}{2} (अ - क) ।$$

$$(३) पा \div भा = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{1}{2} (अ + क) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}{२ \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (अ + क) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (अ + क)}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ + क)} = \text{स्प } \frac{1}{2} (अ + क) ।$$

$$(४) पा \div भा = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}{२ \text{ ज्या } \frac{1}{2} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (अ - क)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (अ + क)}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (अ + क)} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (अ + क)$$

$$(५) पाऽभा = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

$$(६) फाऽबा = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

२३ । व्यादिगुणितभुजांशजीवाकोटिज्यादि प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{ज्या} (\text{न} + १) \text{अ} = \text{ज्या} (\text{अन} + \text{अ})$$

$$= \text{ज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या} (\text{न} + १) \text{अ} = \text{कोज्या} (\text{अन} + \text{अ})$$

$$= \text{कोज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

\therefore \text{यदि } \text{न} = १, २, ३, \dots \dots \text{ स्यात्}

$$\text{सदा } (१) \text{ ज्या } २ \text{ अ} = २ \text{ ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} ।$$

$$(२) \text{ कोज्या } २ \text{ अ} = \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ} ।$$

$$= १ - २ \text{ ज्या}^२ \text{अ} = २ \text{ कोज्या}^२ \text{अ} - १ ।$$

$$(३) \text{ ज्या } ३ \text{ अ} = \text{ज्या} २ \text{ अ} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्या} २ \text{ अ} \cdot \text{ज्याअ}$$

$$= २ \text{ ज्याअ} \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} + \text{कोज्या}^२ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} - \text{ज्या}^३ \text{अ}$$

$$= ३ \text{ ज्याअ} \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^३ \text{अ} = ३ \text{ ज्याअ} - ४ \text{ ज्या}^३ \text{अ} ।$$

$$(४) \text{ कोज्या } ३ \text{ अ} = \text{कोज्या} २ \text{ अ} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्या} २ \text{ अ} \cdot \text{ज्याअ}$$

$$= (२ \text{ कोज्या}^२ \text{अ} - १) \cdot \text{कोज्याअ} - २ \text{ ज्या}^२ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ}$$

$$= २ \text{ कोज्या}^३ \text{अ} - \text{कोज्याअ} - २ \text{ कोज्याअ} + २ \text{ कोज्या}^३ \text{अ}$$

$$= ४ \text{ कोज्या}^३ \text{अ} - ३ \text{ कोज्याअ}, \text{ इत्यादि } ।$$

२४ । द्विगुणज्याकोटिज्याप्रदर्शनं ततोऽर्धांशज्या-

कोटिज्यानयनं च ।

अनन्तरोक्तप्रक्रमस्थात् (२) अस्मात्

$$२ ज्या^२ अ = १ - कोज्या २ अ = \quad (पा) ।$$

$$२ कोज्या^२ अ = १ + कोज्या २ अ = \quad (फा) ।$$

(१) यदि (पा) इदं (फा) अनेन द्वियते

$$तदा \frac{ज्या^२ अ}{कोज्या^२ अ} = स्प^२ अ = \frac{१ - कोज्या २ अ}{१ + कोज्या २ अ} ।$$

(२) यदि (पा), (फा) अनयोः (२अ) (इदम्) (अ) अनेनोत्थाप्यते

$$तदा २ ज्या^२ अ = १ - कोज्या अ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{एतयोः (१५) प्रक्रमोक्तरीत्या इष्ट-} \\ २ कोज्या^२ अ = १ + कोज्या अ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{व्यासार्धे परिणामितयोः सिद्धम्} \end{array} \right.$$

$$२ ज्या^२ अ = त्रि^२ - त्रि . कोज्या अ = त्रि (त्रि - कोज्या अ) = (ता) ।$$

$$२ कोज्या^२ अ = त्रि^२ + त्रि . कोज्या अ = त्रि (त्रि + कोज्या अ) = (था) ।$$

$$(३) (ता) अस्मादिदमुत्पद्यते २ ज्या^२ अ = \frac{२ त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या अ}{२}$$

$$= \frac{ज्या^२ अ + कोज्या^२ अ + त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या अ}{२} = \frac{ज्या^२ अ + (त्रि - कोज्या अ)^२}{२}$$

$$= \frac{ज्या^२ अ + उ^२ अ}{२}, \quad \therefore ज्या^२ अ = \frac{१}{२} \sqrt{ज्या^२ अ + उ^२ अ}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धांशकशिञ्जिनी स्यात्”—इति ।

$$एवम् ज्या^२ अ = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि (त्रि - कोज्या अ)} = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि . उ अ} ।$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा”—इति ।

(४) यदि (ता), (था) अत्र (अ) वर्णः (९०° ± अ) अनेनोत्थाप्यते
तदा २ ज्या^२ अ (९०° ± अ) = त्रि^२ - त्रि . कोज्या (९०° ± अ)

$$= त्रि^२ \mp त्रि . ज्या अ \quad ।$$

$$\begin{aligned} २ \text{ कोज्या}^{\frac{२}{३}} (९०^{\circ} \mp \text{अ}) &= \text{त्रि}^{\frac{२}{३}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{कोज्या} (९०^{\circ} \mp \text{अ}) \\ &= \text{त्रि}^{\frac{२}{३}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ} । \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} (९०^{\circ} \mp \text{अ}) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{२}{३}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

$$\text{कोज्या}^{\frac{२}{३}} (९०^{\circ} \mp \text{अ}) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{२}{३}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्याभुजज्याहतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृती तद्वलयोः पदे स्तः ।
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोज्ये कोटिं भुजज्यां परिकल्प्य चैवम्”—इति॥

२५ । (२२) प्रक्रमस्थयोः (फा) (भा) अनयो-
वर्गयोगे कृते सिद्धम् ।

$$\begin{aligned} & (\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2 \\ &= ४ \text{ कोज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} - \text{क}) \\ &+ ४ \text{ ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} - \text{क}) \\ &= ४ \text{ ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} - \text{क}) \{ \text{कोज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} + \text{क}) + \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} + \text{क}) \} \\ &= ४ \text{ ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} - \text{क}) \\ \therefore \text{ज्या}^{\frac{२}{३}} (\text{अ} - \text{क}) &= \frac{१}{२} \sqrt{ (\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2 } \\ &\text{एवमनेकधा ।} \end{aligned}$$

अस्मिन्निष्ठव्यासार्धे परिणामितेऽपि विकारो न भवति । अत एव
भास्कराचार्यः—

“यद्दोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत् कोटिज्ययोस्तत्कृतियागमूलम् ।
दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा”—इति॥

२६ । अनन्तरप्रक्रमस्थसमीकरणे यदि (क) कोणः
(९०° - अ) अनेनोत्थाप्यते तदा—

$$\begin{aligned} \text{ज्या}^{\frac{1}{2}} \{ \text{अ} - (९०^{\circ} - \text{अ}) \} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2 + (\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2}{2}} \text{ एवमनेकधा ।} \end{aligned}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“दोःकोटिजीवाविवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या ।
स्यात् कोटिबाह्वोर्विवरार्धजीवा”—इति ।

२७ । भुजकोटिचापांशान्तरज्यानयनम् ।

(२४) प्रक्रमतः कोज्या२अ = १ - २ज्या²अ ।

अस्मिन्निष्ठव्यासार्धे परिणामिते कोज्या२अ = त्रि - $\frac{२ज्या²अ}{त्रि}$

वा कोज्या२अ = ज्या (९०° - २अ) = ज्या { (९०° - अ) - अ }
= त्रि - $\frac{ज्या²अ}{\frac{१}{२}त्रि}$ एवमनेकधा ।

अत एव श्रीभास्कराचार्यः—

“दोर्ज्याकृतिर्व्यासदलार्धभक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या ।
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनी स्यात्”—इति ।

२८ । अथ पूर्वोक्तार्धशज्याकोटिज्ययो रूपान्तरानयनम् ।

$$\therefore १ = \text{कोज्या}^२\text{अ} + \text{ज्या}^२\text{अ} ।$$

एवम् ज्या२अ = २ ज्याअ . कोज्याअ

$$\begin{aligned} \therefore १ + ज्या२अ &= \text{कोज्या}^२\text{अ} + २ ज्याअ . कोज्याअ + ज्या²अ \\ &= (\text{कोज्याअ} + ज्याअ)^२ । \end{aligned}$$

$$1 - \text{ज्या } 2\alpha = \text{कोज्या}^2\alpha - 2\text{ज्या}\alpha \cdot \text{कोज्या}\alpha + \text{ज्या}^2\alpha \\ = (\text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha)^2$$

$$\therefore \text{कोज्या}\alpha + \text{ज्या}\alpha = \pm \sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha}$$

$$\text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha = \pm \sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha}$$

(१) अत्र यदि $2\alpha < 90^\circ \therefore \alpha < 45^\circ$

तदा पूर्वसमीकरणमीदृक् स्यात्—

$$\left. \begin{aligned} \text{कोज्या}\alpha + \text{ज्या}\alpha &= \sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \\ \text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha &= \sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{पा})$$

(२) यदि $2\alpha > 90^\circ < 180^\circ$ अतः $\alpha > 45^\circ < 90^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \text{तदा कोज्या}\alpha + \text{ज्या}\alpha &= \sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \\ \text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha &= -\sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{फा})$$

(३) यदि $2\alpha > 180^\circ < 270^\circ \therefore \alpha > 90^\circ < 135^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \text{तदा कोज्या}\alpha + \text{ज्या}\alpha &= \sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha} \\ \text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha &= -\sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{बा})$$

(४) यदि $2\alpha > 270^\circ < 360^\circ \therefore \alpha > 135^\circ < 180^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \text{तदा कोज्या}\alpha + \text{ज्या}\alpha &= -\sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha} \\ \text{कोज्या}\alpha - \text{ज्या}\alpha &= -\sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{भा})$$

(५) (पा) (फा) अनयोः प्रत्येकयोगान्तरतः सिद्धम्

$$\text{कोज्या}\alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \pm \sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha})$$

$$\text{ज्या}\alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{ज्या } 2\alpha} \mp \sqrt{1 - \text{ज्या } 2\alpha}) .$$

अत्र यथा यथा नवत्यल्पः कोणः 45° अंशेभ्यो न्यूनोऽधिको वा स्यात् तथा तथा प्रतिसमीकरणं द्वितीयपक्षस्थद्वितीयपदचिह्नमूर्ध्वमधरं वा बोध्यम् ।

२९ । शिष्यबुद्धिवैशद्यार्थमस्मिन् प्रक्रमे ज्यादीनां मानानां
बैचित्र्यं प्रदर्श्यते (यच्च पूर्वोक्तप्रक्रमेभ्यः स्वल्पायासेनोत्पद्यते)

$$(१) * ज्याअ = \sqrt{१ - कोज्या^२अ} = कोज्याअ . स्पअ = \frac{स्पअ}{छेअ}$$

$$= \frac{कोज्याअ}{कोस्पअ} = \frac{१}{\sqrt{१ + कोस्प^२अ}} = \frac{स्पअ}{\sqrt{१ + स्प^२अ}} = \frac{१}{कोछेअ}$$

$$= \frac{छेअ . कोज्याअ}{कोछेअ} = \frac{स्पअ . कोस्पअ}{कोछेअ} = \frac{\sqrt{छे^२अ - १}}{छेअ} ।$$

$$(२) कोज्याअ = \frac{ज्याअ}{स्पअ} = \frac{१}{\sqrt{१ + स्प^२अ}} = \frac{१}{छेअ}$$

$$= \frac{स्पअ . कोस्पअ}{छेअ} = \frac{ज्याअ . कोछेअ}{छेअ} = ज्याअ . कोस्पअ$$

$$= \frac{कोस्पअ}{कोछेअ} = \frac{कोस्पअ}{\sqrt{१ + कोस्प^२अ}} = \frac{\sqrt{कोछे^२अ - १}}{कोछेअ} ।$$

$$(३) स्पअ = \frac{ज्याअ}{\sqrt{१ - ज्या^२अ}} = \frac{\sqrt{१ - कोज्या^२अ}}{कोज्याअ} = \frac{१}{कोस्पअ}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{कोछे^२अ - १}} = \frac{कोज्याअ . छेअ}{कोस्पअ} = \sqrt{छे^२अ - १}$$

* १, २, ३, इत्यादीनां वैशद्यं ग्रन्थान्ते द्रष्टव्यम् ।

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्प}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\sqrt{२उअ - उ^२अ}}{१ - उअ} ।$$

$$(४) \text{ कोस्पअ} = \frac{१}{\text{स्पअ}} = \sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{स्प}^२\text{अ}} = \frac{१ - उअ}{\sqrt{२उअ - उ^२अ}} ।$$

$$(५) \text{ छेअ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोछेअ}}{१ - उअ} = \frac{१}{१ - उअ} ।$$

$$(६) \text{ कोछेअ} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{स्पअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}} = \text{कोस्पअ} \cdot \text{छेअ} = \frac{१}{\sqrt{२ \text{उअ} - \text{उ}^२\text{अ}}} ।$$

$$(७) \text{ उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}}$$

$$= १ - \frac{१}{\text{छेअ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} ।$$

३० । अस्मिन् प्रक्रमे कोणस्य ज्यादिभ्यो द्विगुणस्य तत्कोणस्य ज्यादीनां मानानि प्रदर्श्यन्ते ।

$$(१) \text{ ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{स्पअ}} = \frac{२\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{छेअ}} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{२\text{स्पअ}}{१ + \text{स्प}^२\text{अ}} = \frac{२\text{स्पअ}}{\text{छे}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{२}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ}} ।$$

$$(२) कोज्या२अ = कोज्या²अ - ज्या²अ = १ - २ ज्या²अ$$

$$= २कोज्या²अ - १ = \frac{१ - स्प²अ}{१ + स्प²अ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{कोस्पअ + स्पअ}$$

$$= \frac{कोस्प²अ - १}{कोस्प²अ + १} = \frac{२ - छे²अ}{छे²अ} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ}$$

$$= \frac{कोछे²अ - २}{कोछे²अ} = \frac{कोछेअ - २ज्याअ}{कोछेअ} ।$$

$$(३) स्प२अ = \frac{२स्पअ}{१-स्प²अ} = \frac{२}{कोस्पअ - स्पअ} = \frac{२ज्याअ \cdot कोज्याअ}{१ - २ज्या²अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ \cdot कोज्याअ}{२कोज्या²अ - १} = \frac{२कोस्पअ}{कोस्प²अ - १} = \frac{२स्पअ}{२ - छे²अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे²अ - २}$$

$$(४) कोस्प२अ = \frac{१-स्प²अ}{२स्पअ} = \frac{कोस्प²अ - १}{२कोस्पअ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{२}$$

$$= \frac{१-२ज्या²अ}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{२कोज्या²अ-१}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{२-छे²अ}{२स्पअ}$$

$$= \frac{कोछे²अ-२}{२कोस्पअ} ।$$

$$(५) छे२अ = \frac{छे²अ}{२-छे²अ} = \frac{छेअ}{२कोज्याअ-छेअ} = \frac{१}{२कोज्या²अ-१}$$

$$= \frac{१}{१-२ज्या^२अ} = \frac{१+स्प^२अ}{१-स्प^२अ} = \frac{कोस्पअ+स्पअ}{कोस्पअ-स्पअ} = \frac{कोस्प^२अ+१}{कोस्प^२अ-१}$$

$$= \frac{कोछे^२अ}{कोछे^२अ-२} ।$$

$$(६) कोछे२अ = १छेअ \cdot कोछेअ = \frac{छेअ}{२ज्याअ} = \frac{कोछेअ}{२कोज्याअ}$$

$$= \frac{१}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{१+स्प^२अ}{२स्पअ} = \frac{छे^२अ}{२स्पअ} = \frac{स्पअ+कोस्पअ}{२}$$

$$= \frac{१+कोस्प^२अ}{२कोस्पअ} = \frac{कोछे^२अ}{२कोस्पअ} ।$$

$$(७) उ२अ = २ज्या^२अ = २-२कोज्या^२अ = \frac{२स्प^२अ}{१+स्प^२अ}$$

$$= \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = \frac{२स्पअ}{स्पअ+कोस्पअ} = \frac{२}{१+कोस्प^२अ} = \frac{२}{कोछे^२अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{कोछेअ} = २ \frac{छे^२अ-१}{छे^२अ} = २ \frac{छेअ-कोज्याअ}{छेअ} ।$$

३१ । अस्मिन् प्रक्रमे निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) ४५अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् । ∴ (२३) प्रक्रमस्थात्

(२) अस्मात् $२ज्या^२अ = १ - कोज्या^२अ$

तथा $कोज्या^२अ = १ - ज्या^२अ$ एवं सिद्धम् ।

∴ यदि अ = ४५° तदा

$$२ ज्या^२ ४५° = १ - कोज्या ९०° = १ = २ कोज्या^२ ४५°$$

$$∴ ज्या ४५° = \pm \sqrt{\frac{१}{२}} = कोज्या ४५° ।$$

अत्रणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

(२) ३० अंशानाम् ६० अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = ३०° कल्प्येत तदा ज्या२अ = कोज्याअ,

$$∴ ज्या२अ = २ ज्याअ . कोज्याअ$$

$$∴ २ ज्याअ . कोज्याअ = कोज्याअ$$

$$∴ ज्याअ = \frac{१}{२} = ज्या ३०° = कोज्या ६०° ।$$

$$कोज्या ३०° = \sqrt{१ - ज्या^२ ३०°} = \sqrt{१ - \frac{१}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२} = ज्या ६०°$$

(३) १८° अंशानाम् ७२° अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८° तदा ज्या२अ = कोज्या३अ ।

$$∴ ज्या२अ = २ ज्याअ . कोज्याअ,$$

$$(२३ प्र.) कोज्या३अ = कोज्याअ - ४ ज्या^३ अ . कोज्याअ ।$$

$$∴ २ ज्याअ . कोज्याअ = कोज्याअ - ४ ज्या^३ अ . कोज्याअ ।$$

$$∴ २ ज्याअ = १ - ४ ज्या^३ अ ∴ ४ ज्या^३ अ + २ ज्याअ = १$$

$$∴ वर्गसमीकरणविधिना ज्याअ = \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

अत्रापि ऋणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

$$∴ ज्या १८° = \frac{\sqrt{५} - १}{४} = कोज्या ७२°$$

$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } १८^{\circ} &= \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ १८^{\circ}} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right)^२} \\
 &= \sqrt{१ - \frac{६-२\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१०+२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}} = \text{ज्या } ७२^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

(४) ३६ अंशानाम् ५४ अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८° तदा ज्या २ अ = २ ज्या अ . कोज्या अ,

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ज्या } ३६^{\circ} &= २ \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right) \left(\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४} = \text{कोज्या } ५४^{\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } ३६^{\circ} &= \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ ३६^{\circ}} = \sqrt{१ - \frac{१०-२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{६+२\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५+१}}{४} = \text{ज्या } ५४^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

(५) ३० एषाम् १८ एषां चार्धांशज्याकोटिज्यानयनम् ।

तत्र (२८) प्रक्रमोक्तमिदं समीकरणद्वयमुपयुज्यते ।

$$\text{ज्या अ} = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१ + \text{ज्या } २ अ} - \sqrt{१ - \text{ज्या } २ अ} \right\}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१ + \text{ज्या } २ अ} + \sqrt{१ - \text{ज्या } २ अ} \right\}$$

अत्र यदि २अ = ३०°, तदा ज्या २अ = १/२

$$\begin{aligned} \text{ज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{१ + \frac{१}{३}} - \sqrt{१ - \frac{१}{३}} \right\} = \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{\frac{३}{३}} - \sqrt{\frac{१}{३}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{३} - १}{३ \sqrt{३}} = \text{कोज्या } ७५^{\circ} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{१ + \frac{१}{३}} + \sqrt{१ - \frac{१}{३}} \right\} = \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{\frac{३}{३}} + \sqrt{\frac{१}{३}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{३} + १}{३ \sqrt{३}} = \text{ज्या } ७५^{\circ} । \end{aligned}$$

$$\text{एवमेव ज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५} + १}{४ \sqrt{२}} - \frac{\sqrt{५} - \sqrt{५}}{४} = \text{कोज्या } ८१^{\circ} ।$$

$$\text{कोज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५} + १}{४ \sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५} - \sqrt{५}}{४} = \text{ज्या } ८१^{\circ} ।$$

(६) ३° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

अष्टादशानां १८ पञ्चदशानां १५ चांशानां ज्याकोटिज्ययोरव-
गतयोस्त्रयाणामंशानां ज्याकोटिज्ये

$$\text{ज्या } ३^{\circ} = \text{ज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ})$$

$$= \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} - \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ}$$

$$\text{कोज्या } ३^{\circ} = \text{कोज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ})$$

$$= \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} + \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ}$$

अस्मात् सुखेन ज्ञायते ।

(७) एवं त्रिषण्णवादिनवत्यन्तानामंशानां प्रत्येकं ज्याकोटिज्ये प्रसाध्य
बालावबोधार्थं विलिख्यते ।

$$\begin{aligned} \text{ज्या } ३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३} + १}{८ \sqrt{२}} (\sqrt{५} - १) - \frac{\sqrt{३} - १}{८} \sqrt{\frac{५ + \sqrt{५}}{२}} \\ &= \text{कोज्या } ८७^{\circ} \end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ६^{\circ} = -\frac{१}{४}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८४$$

$$\text{ज्या } ९^{\circ} = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८१^{\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १२^{\circ} &= -\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ७८^{\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } १५^{\circ} = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}-१) = \text{कोज्या } ७५^{\circ}$$

$$\text{ज्या } १८^{\circ} = \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१) = \text{कोज्या } ७२^{\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २१^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६९^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६६^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २७^{\circ} &= -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६३^{\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ३०^{\circ} = \frac{१}{२} = \text{कोज्या } ६०^{\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ५७^{\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ३६^{\circ} = \frac{१}{२\sqrt{२}} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५४^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ३९^{\circ} = \frac{\sqrt{३} + १}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} + १) - \frac{\sqrt{३} - १}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५१^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४२^{\circ} = -\frac{१}{८} (\sqrt{५} - १) = \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४८^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४८^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{८} (\sqrt{५} - १) + \frac{१}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४२^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५१^{\circ} = \frac{\sqrt{३} - १}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} + १) + \frac{\sqrt{३} + १}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३९^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५४^{\circ} = \frac{१}{४} (\sqrt{५} + १) = \text{कोज्या } ३६^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५७^{\circ} = -\frac{\sqrt{३} - १}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३} + १}{८} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३३^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या } ३०^{\circ} ।$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६३^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}} (\sqrt{५} - १) + \frac{३}{४}\sqrt{५ + \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २७^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६६^{\circ} &= \frac{३}{४} (\sqrt{५} + १) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ - \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २४^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६९^{\circ} &= \frac{\sqrt{३} + १}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} + १) + \frac{\sqrt{३} - १}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २१^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७२^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १८^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७५^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}} (\sqrt{३} + १) \\ &= \text{कोज्या } १५^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७८^{\circ} &= \frac{३}{४} (\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १२^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८१^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}} (\sqrt{५} + १) + \frac{३}{४}\sqrt{५ - \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ९^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८} (\sqrt{५} + १) + \frac{१}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ - \sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ८७^{\circ} = \frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५-१}) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ३^{\circ}$$

$$\text{ज्या } ९०^{\circ} = १$$

$$= \text{कोज्या } ०^{\circ}$$

३२ । अथ कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः * ।

तृतीयोऽध्यायः ३ ।

अत्र त्रिभुजचतुर्भुजयोर्वृत्तलग्नसमानर्जुवद्भुजक्षेत्रस्य वृत्तस्य च कतिचन गुणाः प्रदर्श्यन्ते ।

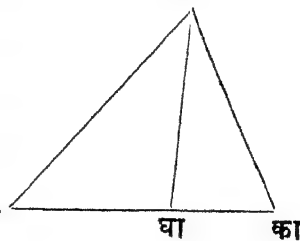
३४ । त्रिभुजे त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति षडव-
यवा भवन्तीत्युक्तं प्राक् ।

तत्र त्रयः कोणाः क्रमेण आ, का, गा, एभिर्द्योत्याः स्युः ।
तत्संमुखकोणाश्च क्रमेण अ, क, ग, एभिः ।

३५ । प्रतित्रिभुजं तत्तद्भुजात् तत्तत्संमुखकोणज्या समा-
नगुणा भवति ।

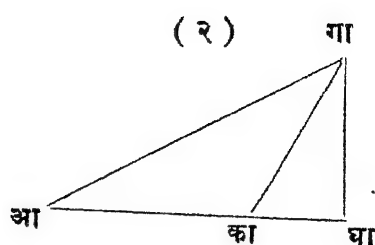
कल्प्यते आकागा-त्रिभुजस्य
आ, का, गा, कोणाः । तथा अ,
क, ग, क्रमेण तत्संमुखभुजाः ।
गा-कोणात् आका-भुजे गा-कोण-
बिन्दोः गाघा-लम्बः कार्यः ।

(१) गा



$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} ।$$

॥ अस्य प्रक्रमस्य तथा ३३ प्रक्रमस्य च केवलं गणिते उपयोगाद्-
ग्रन्थान्ते तद्वैशद्यं द्रष्टव्यम् ।



$$\text{ज्याका ज्यागाकाघा,} = (\text{द्वि. क्षे.}) = \frac{\text{गाघा}}{\text{कागा}} ।$$

$$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} । \therefore \text{ज्याआ} : \text{ज्याका} = \text{अ} : \text{क}$$

$$\text{यद्वा} \quad \text{अ} : \text{ज्याआ} = \text{क} : \text{ज्याका} ।$$

$$\text{समाजात्यात्} \quad \text{अ} : \text{ज्याआ} = \text{ग} : \text{ज्यागा}$$

$$\text{क} : \text{ज्याका} = \text{ग} : \text{ज्यागा} ।$$

३६ । त्रिभुजे भुजयोगान्तरादितस्तत्संमुखकोणयोगान्तरार्धस्पर्शरेखादिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{अ} : \text{क} = \text{ज्याआ} : \text{ज्याका}$$

$$\begin{aligned} \text{अ} + \text{क} : \text{अ} - \text{क} &= \text{ज्याआ} + \text{ज्याका} : \text{ज्याआ} - \text{ज्याका} \\ &= २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} + \text{का}) : २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} - \text{का}) : २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} + \text{का}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} - \text{का}) &= \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} + \text{का})}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} + \text{का})} \cdot \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} - \text{का})}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} (\text{आ} - \text{का})} \\ &= \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{आ} + \text{का}) : \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{आ} - \text{का}) \end{aligned}$$

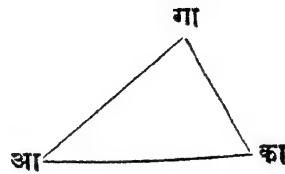
यदि भुजयोर्योगेन तयोरन्तरं लभ्यते तदा तत्संमुखकोणयोरे-
क्यार्धस्य स्पर्शरेखा तयोरन्तरार्धस्य स्पर्शरेखा लभ्यत इत्यर्थः ।

३७ । त्रिभुजे भुजतत्संमुखकोणसम्बन्धतो ज्यास्पर्शरेखा-
दिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

यदि गा समकोणः स्यात्

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$



$$\text{स्पआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} । \quad \text{ज्याका} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याका} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} । \quad \text{स्पका} = \frac{\text{आगा}}{\text{कागा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} ।$$

३८ । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणकोटिज्यानयनयुक्तिः प्रदर्श्यते
(३५ प्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम्)

यदा का कोणो लघुस्तदा	} एते उन्मिती क्रमेण क्षेत्रमितोर्द्वितीयाध्यायस्य त्रयोदशद्वादशप्रतिज्ञाभ्यां संपद्येते ।
आगा ^२ = आका ^२ + कागा ^२ - २आका . काघा	
यदा च का कोणोऽधिकाख्यस्तदा	
आगा ^२ = आका ^२ + कागा ^२ + २आका . काघा	

तत्र यदा का कोणो लघुस्तदा,

$$\therefore \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्याका} ।$$

$$\therefore \text{काघा} = \text{कागा} . \text{कोज्याका} ।$$

यदा वा का कोणोऽधिकस्तदा

$$\therefore \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्यागाकाघा} = - \text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = - \text{कागा} \cdot \text{कोज्याका}$$

अत उत्थापनेन सिद्धमुभयत्रापि तुल्यमेव ।

$$\therefore \text{क}^2 = \text{ग}^2 + \text{अ}^2 - २\text{अग} \cdot \text{कोज्याका} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{२\text{अग}} ।$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याआ} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{२\text{कग}} ।$$

$$\text{एवमेव कोज्यागा} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२\text{अक}} \otimes ।$$

३९ । त्रिभुजे भुजेभ्योऽभीष्टकोणज्यानयनयुक्तिप्रकारः ।

$$\text{अत्र ज्या}^2\text{आ} = १ - \text{कोज्या}^2\text{आ}$$

$$= (१ + \text{कोज्याआ})(१ - \text{कोज्याआ})$$

$$\text{परन्तु } १ + \text{कोज्याआ} = १ + \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२\text{कग} + \text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{२\text{कग}} = \frac{(\text{क}^2 + २\text{कग} + \text{ग}^2) - \text{अ}^2}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{(\text{क} + \text{ग})^2 - \text{अ}^2}{२\text{कग}} = \frac{(\text{क} + \text{ग} + \text{अ})(\text{क} + \text{ग} - \text{अ})}{२\text{कग}} ।$$

⊗ अनेन—

“भुजवर्गयुतिर्भूमिवर्गोना भुजघातहत् ।

दलिता त्रिभुजस्यास्रकोटिज्या भुजसंयुतौ ॥”

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

$$\text{तथा } १ - \text{कोज्याआ} = १ - \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२\text{कग} - \text{क}^२ - \text{ग}^२ + \text{अ}^२}{२\text{कग}} = \frac{\text{अ}^२ - (\text{क}^२ - २\text{कग} + \text{ग}^२)}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{\text{अ}^२ - (\text{क} - \text{ग})^२}{२\text{कग}} = \frac{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{२\text{कग}} ।$$

अथ यदि कल्प्येत $२\text{स} = \text{अ} + \text{क} + \text{ग}$

$$\text{तदा } २(\text{स} - \text{अ}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{अ} = \text{क} + \text{ग} - \text{अ} ।$$

$$२(\text{स} - \text{क}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{क} = \text{अ} + \text{ग} - \text{क} ।$$

$$२(\text{स} - \text{ग}) = \text{अ} + \text{क} + \text{ग} - २\text{ग} = \text{अ} + \text{क} - \text{ग} ।$$

$$\therefore १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स} \times २(\text{स} - \text{अ})}{२\text{कग}} = \frac{२\text{स}(\text{स} - \text{अ})}{२\text{कग}}$$

$$\text{तथा } १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स} - \text{क}) \times २(\text{स} - \text{ग})}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}{२\text{कग}} ।$$

$$\text{अत एव ज्या}^२\text{आ} = \frac{४}{\text{क}^२ \cdot \text{ग}^२} \text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग}) ।$$

$$\therefore \text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

अत्र मानस्य ऋणत्वं न संभवति त्रिभुजैककोणस्य समकोण-
द्वयाल्पत्वात् तज्ज्याया धनत्वात् ।

$$\text{साजात्यात् ज्याका} = \frac{२}{\text{अग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} ।$$

$$\text{ज्यागा} = \frac{२}{\text{अक}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} ।$$

४० । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणार्धज्याकोटिज्यास्पर्शरेखाणां मानं प्रदर्श्यते ।

$$\therefore २\text{ज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ} = १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}} ।$$

$$\therefore \text{ज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}} ।$$

$$\therefore २\text{कोज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ} = १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}} ।$$

$$\therefore \text{कोज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}} ।$$

$$\therefore \text{अत एव स्प}^२\frac{१}{२}\text{आ} = \frac{\text{ज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ}}{\text{कोज्या}^२\frac{१}{२}\text{आ}} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} ।$$

अत्राप्युन्मितीनां धनत्वमेव बोध्यम् ।

$$\text{साजात्यात् ज्याका} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ग})}{\text{अग}}} ।$$

$$\text{ज्यागा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})}{\text{अक}}} ।$$

$$\text{कोज्या}\frac{1}{2}\text{का} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{क})}{\text{अग}}} \quad \text{कोज्या}\frac{1}{2}\text{गा} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}{\text{अक}}}$$

$$\text{स्प}\frac{1}{2}\text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{ग})}{\text{स}(\text{स} - \text{क})}} \quad ,$$

$$\text{स्प}\frac{1}{2}\text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})}{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}} \quad ,$$

४१ । त्रिभुजे भुजेभ्यः क्षेत्रफलानयनयुक्तिप्रकारः प्रदर्श्यते ।
यतो रेखागणितस्य द्वितीयाध्यायतो लम्बगुणं भूम्यर्धं खलु त्रिभुज-
क्षेत्रफलं भवति ।

$$\therefore \text{आकागा-त्रिभुजफलम्} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{गाघा}$$

$$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$$

$$= \frac{\text{कग}}{2} \cdot \frac{2}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

$$= \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})} \quad ।$$

अत एवार्थभटः—

“सर्वभुजैक्यं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रमाद्रहितम् ।
तद्भातपदं त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥”

४२ । (अनु० १) \therefore त्रिभुजफलम्

$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$, इति पूर्वप्रक्रमे सिद्धम् ।

∴ त्रिभुजे भुजयोर्धातार्धं भुजान्तर्गतकोणज्यया गुणितं क्षेत्रफलं भवतीत्यवगम्यते ।

४३ । (अनु० २) त्रिभुजे पूर्वोक्तप्रक्रमैर्लम्बाबाधावगमः सुगमः ।

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \left(\frac{\text{आधा}}{क} \right) = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग}$$

$$\therefore \text{आधा} = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२ग} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \pm \left(\frac{\text{काधा}}{अ} \right) = \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२अग}$$

$$\therefore \text{काधा} = \pm \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२ग} ।$$

अत्र लम्बो यथा त्रिभुजस्यान्तर्बहिर्वा निपतेत् तदनुसारेण द्वितीयाबाधाया धनर्णत्वं बोध्यम् ।

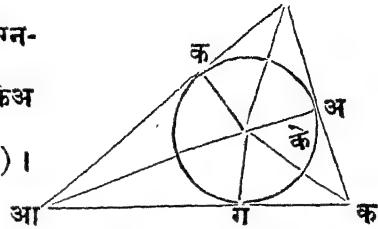
$$\therefore \text{ज्याआ} = \left(\frac{\text{गाधा}}{क} \right) = \frac{२}{कग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

$$\therefore \text{गाधा} = \frac{२}{ग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

४४ । त्रिभुजस्य भुजेभ्यस्तदन्तर्बहिर्लम्बयोर्वृत्तयोर्व्यासार्धनियनं प्रदर्श्यते ।

(१) तत्रादौ त्रिभुजान्तर्लङ्घनवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुजान्तर्लङ्घन-
वृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत तदा केअ
= केक = केग = व्यासार्ध = (व) ।



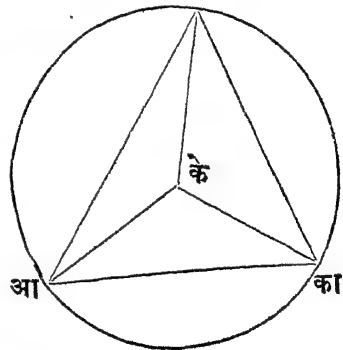
अथ \therefore फ = \triangle आकेका + \triangle काकेगा + \triangle आकेगा

$$= \frac{1}{2} ग.व + \frac{1}{2} अ.व + \frac{1}{2} क.व = \frac{अ + क + ग}{2} व = स.व ।$$

$$\therefore व = \frac{फ}{स} = \frac{\sqrt{स(स - अ)(स - क)(स - ग)}}{स} ।$$

(२) त्रिभुजबहिर्लङ्घनवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुजब-
हिर्लङ्घनवृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत
तदा केअ = केका = केगा = व्या-
सार्ध = (वा) । अथ समानभूमौ
वर्त्तमानयोः केन्द्रपरिधिर्लङ्घनयोः
कोणयोरान्यतोऽन्यतो द्विगुणो भ-
वत्यतः (४२ प्रक्रमतः)



$$फ = \frac{1}{2} अ.क . ज्या \frac{1}{2} आकेका \text{ ☸ } ।$$

☸ अनेन—

“भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्वधेन सा ।

दलित्वा त्रिभुजस्य स्यात् फलं वाऽन्यप्रकारतः ॥”

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

$$\text{परन्तु ज्या } \frac{१}{२} \text{ आक्रेका} = \frac{\frac{१}{२} \text{ आका}}{\text{आके}} = \frac{\text{ग}}{२\text{वा}} ।$$

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}} \quad \therefore \text{वा} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{फ}}$$

$$= \frac{\text{अ.क.ग}}{४ \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे कोणस्य ज्या तत्कोणसंमुखभुजात् त्रिभुजबहिर्लङ्घनवृत्तव्यासाप्तेन तुल्या भवतीति ।

४५ । (अनुमा० १) यदि आकागा त्रिभुजे गा-कोणात् आका-भूमौ लम्बः (ल) क्रियते तदा $\text{फ} = \frac{१}{२} \text{ ग.ल} ।$

$$\text{अथ पूर्वप्रक्रमतः सिद्धम् } \text{फ} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}} ।$$

$$\therefore \frac{१}{२} \text{ ग.ल} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}} \quad \therefore \text{वा} = \frac{\text{अ.क.}}{२\text{ल}} ।$$

अत एव सिद्धान्तविषयकक्रोडग्रन्थे मयोक्तम् ।

“त्रिबाहुकबहिर्लङ्घनवृत्तव्यासदलं किल ।

भुजयोराहतेः खण्डाल्लम्बाप्तेन समं भवेत्”-इति ।

४६ । (अनु० २) ।

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{२} \text{व} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४\text{वा}} \quad \therefore २\text{वाव} = \frac{\text{अ.क.ग}}{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते - त्रिभुजे त्रयाणां भुजानां बधात् तद्योगेनाप्तं त्रिभुजान्तर्बहिर्लङ्घनवृत्तव्यासाधयोर्बधेन द्विगुणेन तुल्यं भवतीति ।

४७ । अथ वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजेभ्यस्तत्कोणकर्ण-
फलादीनामानयनम् ।

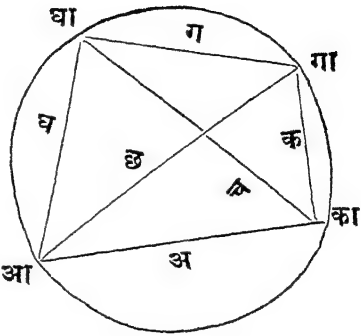
कल्प्यते आका = अ, कागा = क, गाघा = ग, घाआ = घ,
काघा = च, आगा = छ ।

(१) अतः (३८ प्रक्रमतः)

$$\text{कोज्याआ} = \frac{अ^2 + घ^2 - च^2}{२अघ}$$

$$\text{कोज्यागा} = \frac{क^2 + ग^2 - छ^2}{२कग} ।$$

$$\therefore च^2 = अ^2 + घ^2 - २अघ \cdot \text{कोज्याआ} \quad \text{आ} \\ = क^2 + ग^2 - २कग \cdot \text{कोज्यागा}$$



परन्तु क्षेत्रमितेस्तृतीयऽध्यायस्यैकविंशप्रतिज्ञया

$$\text{कोज्याआ} = \text{कोज्या} (१८०^\circ - \text{गा}) = - \text{कोज्यागा}$$

$$\therefore अ^2 + घ^2 - २अघ \cdot \text{कोज्याआ} = क^2 + ग^2 + २कग \cdot \text{कोज्याआ},$$

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \frac{अ^2 + घ^2 - क^2 - ग^2}{२(अघ + कग)} = - \text{कोज्यागा}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याका} = \frac{अ^2 + क^2 - ग^2 - घ^2}{२(अक + गघ)} = - \text{कोज्याघा} ।$$

(२) अतः ३९ प्रक्रमोक्तयुक्त्या—

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{अघ + कग} \sqrt{(स - अ)(स - क)(स - ग)(स - घ)}$$

$$(अत्र स = \frac{अ + क + ग + घ}{२} \text{ इति बोध्यम् })$$

(३) ४० प्रक्रमोक्तयुक्त्या

$$\text{ज्या}^{\frac{1}{2}}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{\text{अघ+कग}}} = \text{कोज्या}^{\frac{1}{2}}\text{गा}$$

$$\text{कोज्या}^{\frac{1}{2}}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स-क})(\text{स-ग})}{\text{अघ+कग}}} = \text{ज्या}^{\frac{1}{2}}\text{गा}$$

$$\text{स्प}^{\frac{1}{2}}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{(\text{स-क})(\text{स-ग})}} = \text{कोस्प}^{\frac{1}{2}}\text{गा}$$

$$(४) \therefore \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}} = - \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}}$$

$$\therefore \text{च}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अक+गघ})}{\text{अघ+कग}}$$

$$\text{साजात्यात् छ}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अघ+कग})}{\text{अक+गघ}}$$

एतेन,

“कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत् ।

योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥ ”

इति ब्रह्मगुप्तोक्तं वृत्तान्तर्गतविषमचतुर्भुजपरमित्यवगम्यते ।

$$(५) \text{ अत एव च छ} = \text{अग} + \text{कघ}, \text{ तथा } \frac{\text{च}}{\text{छ}} = \frac{\text{अक} + \text{गघ}}{\text{अघ} + \text{कग}}$$

अतो मत्कृतक्रोडग्रन्थे—

“वृत्तान्तःस्थचतुर्बाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्दितिः ।

भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥ ”

$$(६) (आकाशा) चतुर्भुजफलम् = \triangle आकाशा + \triangle काशा
= \frac{१}{२} अघ . ज्याआ + \frac{१}{२} कग . ज्याआ = \frac{१}{२} (अघ + कग) ज्याआ
= \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$$

अतः श्रीपतिः—

“भुजसमासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ।
अथ परस्परमेव समाहतं कृतिपदं त्रिचतुर्भुजयोः फलम् ॥”

(७) यदि (आकाशा) त्रिभुजलघुवृत्तस्य व्यासार्ध (वा) कल्प्येत

$$तदा (४४ प्रक्रमतः) वा = \frac{अघच}{४ \triangle आकाशा}$$

$$परन्तु \triangle आकाशा = \frac{१}{२} अघ . ज्याआ$$

$$\therefore वा = \frac{अघच}{२अघ . ज्याआ} = \frac{च}{२ज्याआ} = \frac{च}{२ज्यागा} ।$$

$$\therefore वा = \frac{छ}{२ज्याका} = \frac{छ}{२ज्याघा} ।$$

$$ज्याआ = \frac{२}{अघ + कग} \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$$

$$\therefore वा = \frac{च}{२ज्याआ} = \frac{च (अघ + कग)}{४ \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}} \\ = \frac{१}{४} \sqrt{\frac{(अक + गघ)(अग + कघ)(अघ + कग)}{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}}$$

अस्मादिदमवगम्यते विषमचतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तः कर्तुं शक्यते ।
अथ च भुजानां क्रमव्यत्यासेऽपि न क्षेत्रफले विकारः किन्तु कोणा-

दिष्वेव । अत्र यदि घ = ० कल्प्येत तदा कोणादीनां मानानि पूर्वसा-
धितैस्त्रिभुजकोणादीनां मानैरभिन्नानि संपद्यन्ते ।

४८ । विषमचतुर्भुजमात्रस्यान्योन्यसंमुखकोणद्वयविशि-
ष्टेभ्यो भुजेभ्यः फलानयनम् ।

अत्र पूर्वप्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ।

तत्र यदि क्षेत्रफलद्योतकं (फ) कल्प्येत तदा

$$फ = \frac{१}{२} (अघ . ज्याआ + कग . ज्यागा)$$

$$परन्तु कोज्याआ = \frac{अ^२ + घ^२ - च^२}{२अघ}, कोज्यागा = \frac{क^२ + ग^२ - च^२}{२कग}$$

$$\therefore १ + कोज्याआ = \frac{(अ + घ)^२ - च^२}{२अघ} \quad (१)$$

$$१ - कोज्याआ = \frac{च^२ - (अ - घ)^२}{२अघ} \quad (२)$$

$$१ + कोज्यागा = \frac{(क + ग)^२ - च^२}{२कग} \quad (३)$$

$$१ - कोज्यागा = \frac{च^२ - (क - ग)^२}{२कग} \quad (४)$$

ततः (१) (४) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(अ + घ)^२ - (क - ग)^२ = २अघ (१ + कोज्याआ) + २कग (१ - कोज्यागा)$$

$$वा (स - क)(स - ग) = अघ . \frac{१ + कोज्याआ}{२} + कग . \frac{१ - कोज्यागा}{२}$$

$$= \text{अघ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} + \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} \quad (५)$$

एवमेव (२) (३) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{घ}) = \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} + \text{कग} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} \quad (६)$$

एवम् (५) (६) अनयोगुणनात्

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})$$

$$\begin{aligned} &= \text{अ}^3\text{घ}^3 \cdot \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} \\ &+ \text{क}^3\text{ग}^3 \cdot \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} + \text{अकगघ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{गा} \dagger \\ &= (\text{अघ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{गा} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{गा})^2 \\ &+ \text{अकगघ} (\text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{गा} - \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{गा})^2 \\ &= \frac{1}{9}(\text{अघ} \cdot \dagger \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{गा})^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}(\text{आ} + \text{गा}) \\ &= \text{फ}^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}(\text{आ} + \text{गा}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{फ} = \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ}) - \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}(\text{आ} + \text{गा})}$$

$$\text{अथ} \therefore \text{आ} + \text{का} + \text{गा} + \text{घा} = ३६०^\circ \therefore \frac{1}{3}(\text{आ} + \text{गा}) = १८०^\circ - \frac{1}{3}(\text{का} + \text{घा})$$

$$\text{अत्र} \quad \frac{१ + \text{कोज्याआ}}{२} = \text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{आ}, \text{ एतदर्थं (२४) प्रक्रमो द्रष्टव्यः ।}$$

† अत्र २अकगघ . ज्या^१आ . कोज्या^१आ . ज्या^१गा . कोज्या^१गा
एतत्तुल्यं घनमृणं च क्रियते तथाऽप्यविकार एव ।

‡ २ज्याआ . कोज्याआ = २ज्या२आ । अत्र २आ - स्थाने (आ)
अनेनोत्थाप्यते तदा २ज्या^१आ . कोज्या^१आ = ज्याआ ।

$$\therefore \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} = \frac{\text{ज्याआ}}{२}$$

$$\therefore \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} \cdot \text{कोज्या}^{\frac{1}{3}}\text{आ} = \frac{\text{अघ} \cdot \text{ज्याआ}}{२} \text{ इतोऽग्रे स्फुटम् ।}$$

∴ कोज्या^{२१}/_२ (आ + गा) = कोज्या^{२१}/_२ (का + घा) । अत इदं
फलं संमुखकोणद्वययोरन्यतरेण विशिष्टेभ्यश्चतुर्भ्यो भुजेभ्यः सम्पन्नम् ।

तत्र यदि आ + गा = का + घा = १८०°

तदा कोज्या^{२१}/_२ (आ + गा) = कोज्या^{२१}/_२ (का + घा) = ०

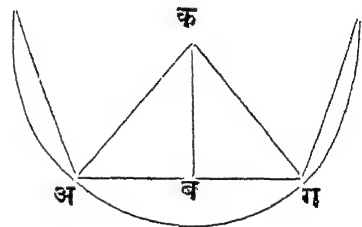
अतोऽत्र फ = $\sqrt{(स - अ)(स - क)(स - ग)(स - घ)}$

पूर्वसाधितेन वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजमानेनाभिन्नं जातम् ।

अत एव विषमचतुर्भुजस्यानेकविधेषु फलेषु वृत्तान्तर्गतस्य तस्य
फलं महत्तमं भवति । इदमेव पूर्वाचार्यैः स्वग्रन्थेषु साधितम् ।

४९ । वृत्तान्तर्गतस्य समानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-
योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल (क) वृत्तकेन्द्रं स्यात्
तदन्तर्गतस्य समानर्जु - (न) सं-
ख्याकभुजक्षेत्रस्य भुजः = अग,
(व) = वृत्तस्य व्यासार्धं
स्यात् तदा कअ, कग रेखे
संयोज्य अग-रेखोपरि कब लम्बः
कार्यः ।



$$\text{अत्र } \angle \text{अकग} = \frac{३६०^\circ}{न}$$

बहुभुजक्षेत्रपरिधिश्च = न . अग = २न . अव

$$= २न . अक . ज्या \angle \text{अकव} = २न . व . ज्या \frac{१८०^\circ}{न}$$

$$\text{एवं बहुभुजक्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अकगक्षेत्रम्} = n \cdot \frac{\text{अग} \cdot \text{कव}}{2}$$

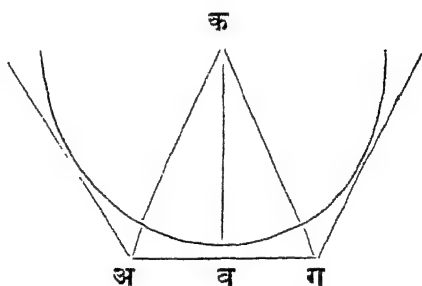
$$= n \cdot \text{अक} \cdot \text{ज्याअकव} \times \text{अक} \cdot \text{कोज्या} \angle \text{अकव}$$

$$= n \cdot \text{व}^2 \cdot \text{ज्या} \frac{160^\circ}{n} \text{ कोज्या} \frac{160^\circ}{n} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुबहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति । तत्क्षेत्रफलं च तत्क्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्ध-वर्गात् समानगुणं भवतीति ।

५० । वृत्तबहिर्लग्नस्य ऋजुसमबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल वृत्त बहि-
र्लग्न(न) संख्याकजुभु-
जक्षेत्रस्य अग-भुजः व-
स्थाने परिधौ लग्नः ।



$$\text{बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रपरिधिः} = n \cdot \text{अग} = 2n \cdot \text{अव}$$

$$= 2n \cdot \text{कव} \cdot \text{स्पअकव} = 2n \cdot \text{व} \cdot \text{स्प} \frac{160^\circ}{n}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अकगक्षेत्रफलम्}$$

$$= n \times \frac{\text{अग} \cdot \text{कव}}{2} = n \cdot \text{कव} \text{ स्प} \angle \text{अकव} \times \text{कव}$$

$$= n \cdot \text{व}^2 \cdot \text{स्प} \frac{160^\circ}{n} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुवहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्क्षेत्रफलं च तत्तदन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धवर्गात् तुल्यगुणं ॐ भवतीति ।

५१ । (व)-व्यासार्धविशिष्टस्य वृत्तस्यान्तर्बहिश्च लग्नयोः समानर्जु- (न) संख्याकभुजक्षेत्रयोः क्रमेण परिधी किल (प) (पा) इति स्यातां फले च (फ) (फा) इति स्याताम् ।

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = \frac{२नव \cdot ज्या \frac{१८०^{\circ}}{न}}{२नव \cdot स्प \frac{१८०^{\circ}}{न}} = कोज्या \frac{१८०^{\circ}}{न}$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = \frac{नव^२ \cdot ज्या \frac{१८०^{\circ}}{न} कोज्या \frac{१८०^{\circ}}{न}}{नव^२ \cdot स्प \frac{१८०^{\circ}}{न}} = कोज्या^२ \frac{१८०^{\circ}}{न}$$

अत्र यदि $न = \infty$ स्यात्

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = कोज्या \frac{१८०^{\circ}}{\infty} = कोज्या ०^{\circ} = १$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = कोज्या^२ \frac{१८०^{\circ}}{\infty} कोज्या^२ ०^{\circ} = १$$

∴ $प = पा$ तथा $फ = फा$ भवेत् ।

अत एव वृत्तान्तर्बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रयोर्भुजसंख्या यथायथाऽधिका स्यात् तथातथा ते क्षेत्रे प्रत्येकं तद्वृत्तक्षेत्रासन्ने भवेताम् । तथा च भुज-संख्याया आनन्त्ये ते वृत्तक्षेत्रे भूत्वा सर्वाशैर्मिथो मिलेताम् । अत एव तत्तद्वृत्तपरिधिस्तत्तद्वृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्तद्वृत्तफलं च तत्तद्वृत्तव्यासार्धवर्गात् समानगुणं भवतीत्यवगम्यते ।

५२ । अथ वृत्तक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः ।

(१) तत्र किल वृत्तान्तर्गतबहुभुजक्षेत्रपरिधिः = २नव.ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ ।

अत्र यथायथा न-संख्याऽधिका स्यात् तथातथाऽयं परिधिर्वृत्त-परिधेरासन्नतरो भवेदित्यत एव पूर्वम् (ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$) अस्य तथा मानं

साध्यते यथाऽत्र न-संख्या महती स्यात् ।

तथा हि (२४) प्रक्रमस्थात् (फा) तः

$$\text{कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \text{कोज्याआ}} \quad \text{॥}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{एवम् कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२^२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}$$

॥ अत्र यदि आ = $९०^{\circ}, \frac{९०^{\circ}}{२}, \frac{९०^{\circ}}{२^२}$ इत्यादि कल्प्यते तदाऽधः-

स्थितस्वरूपाणि जायन्ते ।

$$\text{कोज्या } \frac{90^\circ}{2^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

एवमग्रेऽपि

अनया युक्त्या कोज्या $\frac{90^\circ}{2^p}$ अस्य तथा मानं गणयितुं शक्यते
यथाऽत्र (प) संख्या महती स्यात् । तथा च यदि $n = 2^p$ कल्प्येत

$$\begin{aligned} \text{तदा ज्या } \frac{180^\circ}{n} &= 2 \text{कोज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \cdot \text{ज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \\ &= 2 \text{कोज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \sqrt{1 - \text{कोज्या}^2 \frac{90^\circ}{2^p}} \text{ आसन्नं स्यात् ।} \end{aligned}$$

एवमानीतं ज्या $\frac{180^\circ}{n}$ अस्य मानं n -संख्यया गुणितं सत्
३.१४१५९२६५ इत्यादि भवति । इदम् $\approx \pi$ अनेन द्योत्यं
स्यात् । तथा सति वृत्तपरिधिः $= 2\pi v$ ।

(२) अनन्तरोक्तप्रक्रमे सङ्केतितयोः (प) (फ) वर्णयोः क्रमेण

माने २नव. ज्या $\frac{180^\circ}{n}$, नव^२. ज्या $\frac{180^\circ}{n}$, कोज्या $\frac{180^\circ}{n}$ ।

$$\frac{\text{फ}}{\text{प}} = \frac{\text{नव}^2 \cdot \text{ज्या } \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{कोज्या } \frac{180^\circ}{n}}{२नव \cdot \text{ज्या } \frac{180^\circ}{n}} = ३ \text{व. कोज्या } \frac{180^\circ}{n} \text{ ।}$$

$\approx \pi$ इदं 'प्रीक'-वर्णमालायां 'पाइ' इत्युच्चार्यते ।

अथ वृत्तरूपे बहुभुजक्षेत्रे $n = \infty$ । अत एव कोज्या $\frac{160^\circ}{n}$

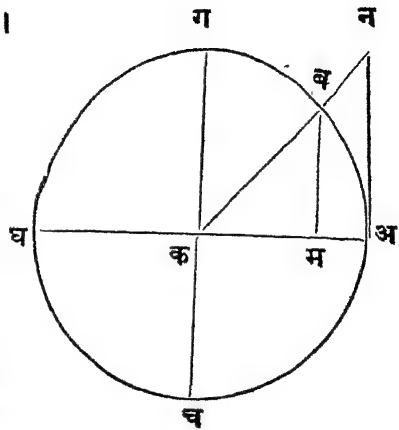
$=$ कोज्या $0^\circ = 1$ ।

$$\therefore \text{वृत्ते } \frac{फ}{प} = \frac{1}{2} व. \therefore फ = \frac{1}{2} व. प ।$$

अथ च पूर्वसिद्धम् $प = 2\pi व$

$$\therefore फ = \pi व^2 ।$$

(३) एवम् अकब-वृत्तखण्ड-
स्यापि फलं शीघ्रमवगम्यते ।
(पार्श्वस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम्)
तथा हि-अत्र किल अब-चाप-
दैर्घ्यम् $= अ$ । व्यासार्धम् $= व$,
तथा च क्षेत्रमितेः षष्ठाध्यायस्य
त्रयस्त्रिंशत्प्रतिज्ञया-



अकब-वृत्तखण्डम् : अगघच ॐ :: अ : $2\pi व$

$$\therefore \text{अकब-वृत्तखण्डम्} = \frac{अ}{2\pi व} \times \text{अगघच ॐ}$$

$$= \frac{अ}{2\pi व} \times \pi व^2 = \frac{1}{2} अव ।$$

(४) अब-चापस्य बम-जीवा, अन-स्पर्शरेखा स्यात् । तत्र
यदि अब-रेखा क्रियते तदा अकब-वृत्तखण्डम्, अकब-त्रिभुजाद-
धिकम् अकन-त्रिभुजाच्चो नं भवेत् ।

$$\therefore \frac{1}{2} अक . अब > \frac{1}{2} अक . बम < \frac{1}{2} अक . अन$$

$$\therefore अब > बम < अन ।$$

अतः अकव-लघुकोणसंमुखचापम् अव-स्वज्यातोऽधिकं स्वस्पर्शरेखा-
तश्च न्यूनं भवति तदेव विलिख्य प्रदर्शयते

$$अ > ज्याअ < स्पअ ।$$

तत्र यदि $अ = ०$ स्यात् तर्हि

$$\frac{ज्याअ}{स्पअ} = \frac{कोज्याअ}{व} = \frac{कोज्या०^{\circ}}{व} = \frac{व}{व} = १$$

अस्मादिदमनुमीयते । चापस्यात्यन्तह्रासे तज्ज्यास्पर्शरेखे मिथ-
स्तुल्ये भवतः । अत एव ते प्रत्येकं स्वचापेन समे स्याताम् ।

$$\text{तथा } \frac{ज्याअ}{अ} = \frac{स्पअ}{अ} = १, \text{ एवं सिध्यति ।}$$

५३ । रूपव्यासार्धे चापस्य या जीवादयस्ता एव तच्चा-
पसम्बन्धिकोणस्यापि भवन्तीति पूर्वं प्रदर्शितम् । (१४ प्र. द्र.)
तत्र यच्चापदैर्घ्यमानं तदेव तत्सम्बन्धिकोणस्य स्यात् तच्च
तस्य कोणस्य चापीयं मानमुच्यते । बीजक्रियया सम्पाद्यमाने
त्रिकोणमितिगणिते कोणस्य चापीयमानमेव गृह्यते ।

अथ यदि (व) व्यासार्धे (२π व) अयं पूर्वसिद्धः परिधिस्तदा
रूपव्यासार्धे क इत्यनुपातेनाप्तं (२π) रूपव्यासार्धे परिधिदैर्घ्यम् ।

अतः $\pi = \otimes ३. १४१५९२६५$ इत्यादिकं रूपव्यासार्धेऽर्धपरिधि-
मानं समकोणद्वयस्य चापीयं मानं स्यात् ।

तथा च यस्य कोणस्य चापीयं मानं रूपं स्यात् तस्य

$$\frac{१८०^{\circ}}{३.१४१५९२.} = ५७.२९५७ इ० = ५७^{\circ} । १७' । ४४'' . ६ इत्या-$$

द्यंशादिमानं भवेत् । अस्मान्निर्दिष्टकोणस्यांशादिमानाच्च तत्कोणसंब-
न्धिचापदैर्घ्यावगमः सुगमः ।

अथ

परीक्षार्थिजनोपकारार्थं

(२९) प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि ।

$$(१) \text{ ज्याअ}^2 = १ - \text{कोज्या}^2\text{अ} \therefore \text{ ज्याअ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्याअ. स्पअ} ।$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोस्प}} ।$$

$$\begin{aligned} \text{ज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2\text{अ}}} । \end{aligned}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्याअ}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \quad |$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - 1}}{\text{छेअ}} \quad |$$

$$(२) \text{ कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} \quad |$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ} \times 1}{\text{कोज्याअ}}}{1} = \frac{1}{\text{छेअ}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{स्प}^2\text{अ}}} \quad |$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{1}{\text{ज्याअ}}}{1} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \text{ज्याअ.कोस्पअ} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \\ &= \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{1+\text{कोस्प}^2\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ}-1}}{\text{कोछेअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$(३) \quad \text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{1-\text{ज्या}^2\text{अ}}} \quad |$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{1-\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} \quad |$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{1}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{1}{\text{कोस्पअ}} \quad |$$

$$\text{स्पअ} = \frac{1}{\text{कोस्पअ}} = \frac{1}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ}-1}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{1}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{1}{\text{कोज्याअ} \times \frac{1}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्प}^2\text{अ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{1 - \text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1 - \text{उअ}} = \frac{\sqrt{1 - (1 - \text{उअ})^2}}{1 - \text{उअ}} \\ &= \frac{\sqrt{2\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}}{1 - \text{उअ}} \quad | \end{aligned}$$

(४) कोस्पअ = $\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$ । इतोऽग्रे पूर्वोक्तस्पर्शरेखास्वरूपे बहुधा हर-

भाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वमुपपद्यते ।

$$(५) \text{छेअ} = \frac{1}{\text{कोज्याअ}} = \sqrt{1 + \text{स्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{छेअ} = \frac{1}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times 1}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{छेअ} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \text{ज्याअ}} \\ &= \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\begin{aligned}\text{छेअ} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{छेअ} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछेअ}^2 - १}} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \text{स्पअ} \times \text{कोछेअ} ।$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{१-उअ} ।$$

$$(६) \text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\begin{aligned} \text{कोछेअ} &= \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{१}{\text{कोज्याअ} \times \text{स्पअ}} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोछेअ} &= \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{ज्याअ}} । \end{aligned}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{छेअ}}{\text{ज्याअ}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}}{\text{स्पअ}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - १}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्पअ} \times \text{छेअ} ।$$

$$\begin{aligned} \text{कोछेअ} &= \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{१}{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^2}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}} । \end{aligned}$$

$$(७) \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{दअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{१} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= १ - \frac{१ \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}}$$

$$= १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}}$$

$$\text{दअ} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}}$$



अथ

(३०) प्रक्रमोक्तद्विगुणकोणस्य ज्यादिस्वरूपाणां वैशद्यम् ।

$$(१) \text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{स्पअ}} \quad |$$

$$\text{कोज्याअ}$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{२\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{२\text{स्पअ}}{\text{छे}^२\text{अ}} ।$$

$$\text{ज्या२अ} = \frac{२\text{स्पअ}}{\text{छे}^२\text{अ}} = \frac{२\text{स्पअ}}{\sqrt{१+\text{स्प}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{२}{\frac{१}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}} \\
 &= \frac{2}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{2}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \quad |
 \end{aligned}$$

$$\text{ज्या२अ} = २\text{ज्याअ.कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ.ज्याअ.कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ}} \quad |$$

$$\text{ज्या२अ} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{१+\text{कोस्प}^२\text{अ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (२) \text{ कोज्या२अ} &= \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = १ - \text{ज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} \\
 &= १ - २\text{ज्या}^२\text{अ} \quad |
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोज्या२अ} &= \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - (१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}) \\
 &= \text{कोज्या}^२\text{अ} - १ + \text{कोज्या}^२\text{अ} = २\text{कोज्या}^२\text{अ} - १ \quad |
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोज्या२अ} &= \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = \frac{१ - \frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}}{१} \\
 &\quad \text{कोज्या}^२\text{अ}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{छे}^२\text{अ}} = \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{१ + \text{स्प}^२\text{अ}} \quad |$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}{1} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}} = \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}} \end{aligned}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1}{1} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1$$

$$= \frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1} = \frac{2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 = \frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{1} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{२कोज्याअ - \frac{१}{कोज्याअ}}{१}}{कोज्याअ} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ} ।$$

$$कोज्या२अ = कोज्या^२अ - ज्या^२अ = १ - २ज्या^२अ = \frac{\frac{१ - २ज्या^२अ}{ज्या^२अ}}{१} = \frac{१ - २ज्या^२अ}{ज्या^२अ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{कोछे^२अ} ।$$

$$कोज्या२अ = २कोज्या^२अ - १ = \frac{\frac{२कोज्या^२अ - १}{कोज्याअ}}{१} = \frac{२कोज्या^२अ - १}{कोज्याअ}$$

$$= \frac{\frac{२कोज्याअ - \frac{१}{कोज्याअ}}{१}}{कोज्याअ} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ} ।$$

$$कोज्या२अ = १ - २ज्या^२अ = \frac{\frac{१ - २ज्या^२अ}{ज्या^२अ}}{१} = \frac{\frac{१}{ज्या^२अ} - २}{१} = \frac{१ - २ज्या^२अ}{ज्या^२अ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{कोछे^२अ} ।$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = 1 - \text{रज्या}^2\text{अ} = \frac{1 - \text{रज्या}^2\text{अ}}{1} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ} - \text{रज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\begin{aligned} (३) \text{ स्प}^2\text{अ} &= \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} \\ &= \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{रज्याअ}}{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} \\ &= \frac{\text{रस्पअ}}{1 - \text{स्प}^2\text{अ}} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प}^2\text{अ} &= \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{२}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{२}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} । \end{aligned}$$

$$\text{स्प}^2\text{अ} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{1 - \text{रज्या}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^२\text{अ} - १} \quad |$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - १} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^२\text{अ} - १} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^२\text{अ} - १} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\frac{\text{२कोज्या}^२\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{\text{२} - \text{छे}^२\text{अ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^२\text{अ}} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\frac{१ - \text{२ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोछे}^२\text{अ} - २} \quad | \end{aligned}$$

$$(४) कोस्परअ = \frac{\text{कोज्या}२अ}{\text{ज्या}२अ} = \frac{\text{कोज्या}^२अ - \text{ज्या}^२अ}{२\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}} ।$$

एवं स्पष्टमवगम्यते यत् स्पर्शरेखाया हरभाज्ययोः परिवर्तनात् कोटिस्पर्शरेखा भवत्यतः पूर्वकृतस्पर्शरेखास्वरूपाणां हरभाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वेषां कोटिस्पर्शरेखास्वरूपाणां सिद्धिः सुखेन संपाद्या ।

$$(५) छे२अ = \frac{१}{\text{कोज्या}२अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^२अ - \text{ज्या}^२अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^२अ - १}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{कोज्या}^२अ}}{\frac{२\text{कोज्या}^२अ - १}{\text{कोज्या}^२अ}} = \frac{\text{छे}^२अ}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^२अ}} = \frac{\text{छे}^२अ}{२ - \text{छे}^२अ} ।$$

$$\text{छे}२अ = \frac{१}{२\text{कोज्या}^२अ - १} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{२\text{कोज्या}^२अ - १}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}} ।$$

$$\text{छे}२अ = \frac{१}{२\text{कोज्या}^२अ - १} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^२अ} \text{ एते तु पूर्वकृत-}$$

वैशद्यादतिविशदे ।

$$\text{छे}२अ = \frac{१}{\text{कोज्या}^२अ - \text{ज्या}^२अ} = \frac{\text{ज्या}^२अ + \text{ज्या}^२अ}{\text{कोज्या}^२अ - \text{ज्या}^२अ}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{1 + \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} \\
 & = \frac{1 + \text{स्प}^2\text{अ}}{1 - \text{स्प}^2\text{अ}} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} \\
 & = \frac{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} + 1}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1} \\
 & = \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{छे२अ} &= \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}} \\ &= \frac{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\frac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\text{कोछे}^२\text{अ} - २} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (६) \text{ कोछे२अ} &= \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{१}{२} \frac{१ \times १}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{१}{२} \text{छेअ} \times \text{कोछेअ} \end{aligned}$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{ज्याअ}} \quad |$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{२\text{कोज्याअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned} \text{कोछे२अ} &= \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{\frac{१}{२\text{ज्याअ}}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्या}^२\text{अ} = \frac{\frac{१}{२\text{स्पअ}}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्या}^२\text{अ} \\ &= \frac{\text{छे}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोछे२अ} &= \frac{१}{२ज्याअ . कोज्याअ} = \frac{१ \times १}{१ \times २ज्याअ . कोज्याअ} \\
 &= \frac{१}{२ज्याअ . कोज्याअ} = \frac{ज्या^२अ + कोज्या^२अ}{२कोज्याअ . ज्याअ} \\
 &= \frac{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} + \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}}{२} = \frac{स्पअ + कोस्पअ}{२} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोछे२अ} &= \frac{१}{२ज्याअ . कोज्याअ} = \frac{१}{२ज्या^२अ . \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} \\
 &= \frac{\frac{१}{ज्या^२अ}}{\frac{२कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{\text{कोछे}^२अ}{२कोस्पअ} = \frac{१ + कोस्प^२अ}{२कोस्पअ} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (७) \quad उ२अ &= १ - कोज्या२अ = १ - (कोज्या^२अ - ज्या^२अ) \\
 &= १ - कोज्या^२अ + ज्या^२अ = २ज्या^२अ ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 उ२अ &= १ - कोज्या^२अ + ज्या^२अ \\
 &= १ - कोज्या^२अ + १ - कोज्या^२अ \\
 &= २ - २ कोज्या^२अ ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 उ२अ = २ज्या^२अ &= \frac{\frac{२ज्या^२अ}{कोज्या^२अ}}{\frac{१}{कोज्या^२अ}} = \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = \frac{२स्प^२अ}{१ + स्प^२अ} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{उ२अ} = २ज्या^२अ = \frac{२ज्या^२अ}{\frac{ज्याअ \cdot कोज्याअ}{१}} = \frac{२ज्याअ}{\frac{कोज्याअ}{१ \times १}} \\ = \frac{२ज्याअ}{ज्याअ \cdot कोज्याअ} \cdot \frac{१ \times ज्याअ \cdot कोज्याअ}{१ \times ज्याअ \cdot कोज्याअ}$$

$$= \frac{२स्पअ}{१} = \frac{२स्पअ}{\frac{ज्या^२अ}{ज्याअ \cdot कोज्याअ} + \frac{कोज्या^२अ}{ज्याअ \cdot कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२स्पअ}{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} + \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{२स्पअ}{स्पअ + कोस्पअ} ।$$

$$\text{उ२अ} = २ज्या^२अ = \frac{२}{\frac{१}{ज्या^२अ}} = \frac{२}{कोछे^२अ} = \frac{२}{१ + कोस्प^२अ} ।$$

$$\text{उ२अ} = २ज्या^२अ = \frac{२ज्याअ}{\frac{१}{ज्याअ}} = \frac{२ज्याअ}{कोछेअ} ।$$

$$\text{उ२अ} = २ज्या^२अ = \frac{२ज्या^२अ}{\frac{कोज्या^२अ}{१}} = \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = २ \frac{स्प^२अ}{छे^२अ}$$

$$= २ \frac{छे^२अ - १}{छे^२अ} ।$$

$$\text{उ२अ} = २\text{ज्या}^२\text{अ} = \frac{२\text{ज्या}^२\text{अ}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{१}} = २ \frac{\frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\frac{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २ \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}} - \text{कोज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\text{छेअ} - \text{कोज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$



अथ

३९पृष्ठस्थ—३२प्रक्रमोक्तसारण्युत्पादनप्रकारश्चात्रैवान्ते

३३प्रक्रमस्यापि निवेशः ।

(१) तत्रादावेकस्याः कलाया ज्याकोटिज्यानयनम् ।

ज्याअ = $\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{१ + ज्या२अ} - \sqrt{१ - ज्या२अ} \right\}$ । अत्र यदि

$$२अ = १५^{\circ} \text{ अत एव ज्या२अ} = \frac{\sqrt{३-१}}{२\sqrt{२}} = *२५८८१९०४५१०२,$$

इत्यादि ।

$$\text{तथा ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२} = † १३०५२६१९२२२० \text{ इत्यादि} = ज, ।$$

पुनर्यदि ज, अनेन २अ इदमुत्थाप्येत तदा

* अथावर्गोक्तानां नवीनगणितरीत्या मूलानयनम् ।

यथा $\sqrt{२} = १ + \text{शेषावयवाः}$ । अत्रावयवा 'दशमलव'-स्य नियमानुसारेण २४) १०० (४

९६

२८१) ४०० (१

२८१

२८२४) ११९०० (४

११२९६

..... ।

एवम् $\sqrt{२} = १.४१४.....$ इत्यादि ।

एवम् $\sqrt{३} = १.७३२.....$ इत्यादि ।

$$\text{अतः ज्या } १५ = \frac{\sqrt{३-१}}{२\sqrt{२}} = २५८८..... \text{ इत्यादि ।}$$

† 'क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलात्' 'त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं' वाऽर्धांशज्येत्यतः ।

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०.६५४०३१२९२३० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

एवं मुहुरर्धोऽंशज्यायां गृहीतायाम्

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०.०००५११३२६९०१ \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०.०००२५५६६३४५० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_१$$

एवमुत्पद्यते ।

अत्र ज_१, इयं ज_२ अस्या अर्धेन समं भवतीति स्पष्टं दृश्यते ।
अनेनेदमनुमीयते यत् सूक्ष्मकोणयोरेकस्य यत्संख्यापूरणोऽंशस्तज्ज्या
भवति तत्संख्यापूरणोऽंशोऽपरकोणस्यापि स्वल्पान्तरात् तज्ज्या भवतीति

$$\therefore \frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} :: १' : \text{ज्या } १'$$

$$\therefore \text{ज्या } १' = \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०}$$

$$= ०.०००२५५६६३४५०... \times \frac{२५६}{२२५} = ०.०२९०८८८१९२.....$$

$$\text{एवम् } \therefore \text{कोज्याअ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } १' = \sqrt{१ - (०.०२९०८८८१९२...)^२} \\ = ९९९९९९९५७६९२... ।$$

(२) द्विज्यादीनां कलानामंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\text{ज्या (अ + क)} = * २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या (अ - क)}$$

* अत्र २० प्रक्रमावलोकनतः स्फुटम् ।

$$= * २ज्याअ \left\{ १ - २ज्या^{२\frac{१}{३}} क \right\} - ज्या (अ - क)$$

$$= २ज्याअ - ज्या (अ - क) - ४ ज्याअ . ज्या^{२\frac{१}{३}} क$$

अतो यदा (क) स्थाने १' तथा (अ) स्थाने १', २', ३' इत्याद्याः
स्युस्तदा

$$ज्या२' = २ज्या१' + ज्या (१' - १') - ४ ज्या १' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

$$ज्या३' = २ज्या२' + ज्या (२' - १') - ४ ज्या २' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

$$ज्या४' = २ज्या३' + ज्या (३' - १') - ४ ज्या ३' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

इत्यादि ।

एकस्याः कलाया ज्याया अवगमादत्र ४ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' एतन्मानं सुखेन
ज्ञायते तत उक्तयुक्त्या द्वित्र्यादिकलानां ज्ञानं सुगमम् ।

अनयैव युक्त्यैकस्यांशस्य त्रिंशतः कलानां च जीवां विज्ञाय
द्वित्र्याद्यंशानां जीवाः सुखेन ज्ञातुं शक्याः ।

$$\text{एवं } \therefore \text{ कोज्या (अ + क) } = २कोज्याअ . कोज्याक - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ (१ - २ज्या^{२\frac{१}{३}} क) - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ - कोज्या (अ - क) - ४कोज्याअ . ज्या^{२\frac{१}{३}} क ।$$

अतो यद्यत्र क = १', तथा अ = एकद्वित्र्यादिकलाः स्युस्तदा

$$\text{कोज्या } २' = २कोज्या१' - कोज्या (१' - १') - ४कोज्या१' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

$$\text{कोज्या } ३' = २कोज्या२' - कोज्या (२' - १') - ४कोज्या२' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

$$\text{कोज्या } ४' = २कोज्या३' - कोज्या (३' - १') - ४कोज्या३' \times ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' ।$$

इत्यादि ।

अतोऽपि ४ज्या^{२\frac{१}{३}} ३०'' एतन्मानज्ञानात् द्वित्र्यादिकलानां कोटि-
ज्यावगमः सुगमः । एवमेकस्यांशस्य कोटिज्यायां त्रिंशतः कलानां च
जीवायां ज्ञातायां द्वित्र्यादिकांशानामपि कोटिज्याज्ञानं सुलभम् ।

$$* \text{ अत्र २४ प्रक्रमतः } \therefore २ज्या^{२\frac{१}{३}} क = १ - कोज्याक$$

$$\therefore \text{ कोज्याक } = १ - २ज्या^{२\frac{१}{३}} क$$

(३) द्वित्र्याद्यंशानां प्रकारान्तरेण ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वम् ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \\ \text{कोज्या२अ} = २\text{कोज्या}^२\text{अ} - १ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{आभ्यामंशद्वयस्य} \\ \text{ज्याकोटिज्ये विज्ञाय} \end{array}$$

$$\text{ततः ज्या (अ + क)} = * \frac{(\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{ज्या (अ - क)}}$$

$$\text{कोज्या (अ + क)} = \frac{(\text{कोज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{कोज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{कोज्या (अ - क)}}$$

आभ्यां त्र्यादीनामंशानां ज्याकोटिज्याज्ञानं सुगमम् ।

$$\text{तथा हि ज्या३}^{\circ} = \frac{(\text{ज्या२}^{\circ} + \text{ज्या१}^{\circ}) (\text{ज्या२}^{\circ} - \text{ज्या१}^{\circ})}{\text{ज्या१}^{\circ}}$$

$$\text{ज्या४}^{\circ} = \frac{(\text{ज्या३}^{\circ} + \text{ज्या१}^{\circ}) (\text{ज्या३}^{\circ} - \text{ज्या१}^{\circ})}{\text{ज्या२}^{\circ}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या३}^{\circ} = \frac{(\text{कोज्या२}^{\circ} + \text{ज्या१}^{\circ}) (\text{कोज्या२}^{\circ} - \text{ज्या१}^{\circ})}{\text{कोज्या१}^{\circ}}$$

$$\text{कोज्या४}^{\circ} = \frac{(\text{कोज्या३}^{\circ} + \text{ज्या१}^{\circ}) (\text{कोज्या३}^{\circ} - \text{ज्या१}^{\circ})}{\text{कोज्या२}^{\circ}} \text{ इत्यादि ।}$$

अनयैव युक्त्या सैकव्यादिकलानामेकद्वित्र्याद्यंशानां ज्याकोटि-
ज्यावगमः सुगमः । तथाहि—

$$\text{ज्या (१^{\circ}, १')} = \frac{(\text{ज्या १}^{\circ} + \text{ज्या १}') (\text{ज्या १}^{\circ} - \text{ज्या १}')}{\text{ज्या ५९}'}$$

$$\text{ज्या (१^{\circ}, २')} = \frac{(\text{ज्या १}^{\circ} + \text{ज्या २}') (\text{ज्या १}^{\circ} - \text{ज्या २}')}{\text{ज्या ५८}' } \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, १') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } १') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } १')}{\text{कोज्या } ५९}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, २') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } २') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } २')}{\text{कोज्या } ५८'} \text{ इत्यादि ।}$$

(४) एवमनेन विधिना त्रिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्ये प्रसाध्याग्रे

$$\text{ज्या } (\text{अ} + \text{क}) = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या } (\text{अ} - \text{क})$$

$$\text{कोज्या } (\text{अ} + \text{क}) = \text{कोज्या } (\text{अ} - \text{क}) - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}$$

एतदाधारतः सुखेन ज्याकोटिज्ये अवगन्तव्ये ।

तथा हि, यदि अ = ३०° । क = एकद्वित्र्यादिकलास्तदा २ज्याअ = १' ।

$$\therefore \text{ज्या } (३०^{\circ} \mid १') = \text{कोज्या } १' - \text{ज्या } (२९^{\circ} \mid ५९') ।$$

$$\text{ज्या } (३०^{\circ} \mid २') = \text{कोज्या } २' - \text{ज्या } (२९^{\circ} \mid ५८') \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } (३०^{\circ} \mid १') = \text{कोज्या } (२९^{\circ} \mid ५९') - \text{ज्या } १'$$

$$\text{कोज्या } (३०^{\circ} \mid २') = \text{कोज्या } (२९^{\circ} \mid ५८') - \text{ज्या } २', \text{ इत्यादि ।}$$

एवमिह केवलं व्यवकलनेन ज्याकोटिज्यावगमः ।

(५) एवं पञ्चचत्वारिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्याः साध्याः । तदनन्तरम्—

$$\therefore \text{ज्या } (४५^{\circ} + \text{अ}) = \text{कोज्या } (४५^{\circ} - \text{अ})$$

$$\text{कोज्या } (४५^{\circ} + \text{अ}) = \text{ज्या } (४५^{\circ} - \text{अ})$$

अतो या एव ४५°पर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याः कोटिज्याश्च ता एव प्रातिलोम्येन पञ्चचत्वारिंशदंशाधिकानां सकलानामंशानां कोटिज्या ज्याश्च भवन्ति ।

एवं सर्वेषां नवतेरंशानां ज्याकोटिज्यावगमात् तत्सारणीसंपादनं सुशकम् ।

$$(६) \text{यतः ज्या } ९०^{\circ} + \text{अ} = + \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या } (९०^{\circ} + \text{अ}) = - \text{ज्याअ}$$

$$\text{ज्या } (१८०^{\circ} + \text{अ}) = - \text{ज्याअ} । \text{कोज्या } (१८०^{\circ} + \text{अ}) = - \text{कोज्याअ}$$

ज्या $(२७०^{\circ} + अ) = -$ कोज्याअ । कोज्या $(२७०^{\circ} + अ) = +$ ज्याअ
अतो नवत्यंशपर्यन्तानामंशानां ज्याकोटिज्यासारणीत एव नव-
त्यधिकानामप्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुशकः ।

(७) स्पर्शरेखाणां कोटिस्पर्शरेखाणां च सारणीसंपादनम्

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोस्पअ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

एतदाधारतः सुशकम् ।

(८) एवं छेदनरेखाणां कोटिच्छेदनरेखाणां चोत्क्रमज्यानां कोट्यु-
त्क्रमज्यानां च सारणी—

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} \quad \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ}$$

$$\text{कोउअ} = १ - \text{ज्याअ}$$

आभ्यश्चतसृभ्यस्तत्तदुन्मितिभ्यः संपादयितुं सुशका ।

इति कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः ।

३३ । पूर्वसाधितज्यादीनां गुणनभजनाद्यपेक्ष्य तत्प्रघात-
मापकानां गुणनभजनादिकेऽत्यल्पायासः स्यात् किन्तु कोणी-
यज्यादीनां प्राय एकाल्पत्वात् तत्प्रघातप्रमापका ऋणगता
भवन्त्यतः कोणीयज्याद्याः १०° एतद्व्यासार्धपरिणताः कृत्वा
तादृशानां प्रघातमापकाः गणितलाघवाय सारण्यां लिख्यन्ते ।

त्रिकोणमितिसहायकं नवीनगणितम् ।

इह त्रिकोणमितौ पाश्चात्यगणितसंकेतानभिज्ञानां बहुधा
प्रघातमापकाङ्कविचारे बुद्धिप्रागल्भ्यं न जायतेऽतः कतिचन
तत्संकेतविषयाः प्रदर्श्यन्ते ।

घातवृद्धिः = Involution.

(१) यदि कश्चिदङ्कस्तेनैव तद्वर्गेणेत्यादिभिर्गुण्यते तदा स
तद्घाताङ्कपर्यन्तं वर्धयति इत्यतः सा घातवृद्धिरित्युच्यते ।

यथा— $अ \times अ = अ^2$ *, अत्र २ इति द्विघातः । एवम्
 $अ \times अ \times अ = अ \times अ^2 = अ^3$, ३ इति त्रिघातः । एवं यथेष्टं भवितु-
 मर्हति ।

(२) घातवृद्धौ धनर्णत्वं तद्घाताङ्कत एवावगम्यतेऽर्थाद्
 घाताङ्के विषये तथा तदङ्कस्यर्णत्वे तत्फलमृणमन्यथा धनम् ।

यथा— $अ \times - अ \times - अ = - अ^3$,

$- अ \times - अ \times - अ \times - अ = अ^4$, एवं सर्वत्र ।

(३) द्वयोर्घातवर्धिताङ्कयोर्घाते क्रियमाणे तदङ्कस्योपरि
 द्वयोर्घातिमापकाङ्कयोर्योगाङ्कदानेन वर्धिताङ्कघातो भवति ।

यथा— $अ^2 \times अ^2 = अ^{2+2} = अ^4$,

$अ^2 \times अ^3 = अ^{2+3} = अ^5$, एवमन्यदपि ।

(४) वर्धिताङ्कभागहारे भाज्यहारयोर्घाताङ्कवियोगाल्लब्धिः
 संपद्यते ।

यथा— $\frac{अ^3}{अ^2} = अ^{3-2} = अ^1 = अ$ ।

$$\frac{अ^2}{अ^3} = अ^{2-3} = अ^{-2} = \frac{1}{अ^2} ।$$

$$\frac{अ^2}{अ^2} = अ^{2-2} = अ^0 = 1 ।$$

$$\text{एवम् } \frac{अ}{अ} = \frac{अ^1}{अ^1} = अ^{1-1} = अ^0 = 1 ।$$

$$\therefore \frac{अ^3}{अ^2} = \frac{अ \times अ \times अ}{अ \times अ} = अ \quad \therefore अ^1 = अ ।$$

* अ-कारस्योपरि द्वित्र्याद्यङ्काः स्थाप्यन्ते ते घातज्ञापका वा
 घातमापकाः (Powers) इत्युच्यन्ते ।

$$\therefore \frac{अ^२}{अ^३} = \frac{अ \times अ}{अ \times अ \times अ} = \frac{१}{अ} \therefore अ^{-१} = \frac{१}{अ} ।$$

$$\therefore \frac{अ^२}{अ^२} = \frac{अ \times अ}{अ \times अ} = १ \therefore अ^० = १ ।$$

(५) उक्तनियमाननुमृत्यैव कतिचनान्ये विषया अपि तत्प्रयोजनकाः प्रदर्श्यन्ते ।

यथा— अ^५, इत्यत्र घाताङ्को ५, ६, ७.....इत्यादि यथेष्टं भवितुमर्हति, तत्र यदि ५, ६, ७.....न-पर्यन्तं भवेत् तदा अ^५ × अ^६ × अ^७.....अ^न । अत्रैव यदि कल्प्यते ५ = न, ६ = म, ७ स, तदा अ^५ × अ^६ × अ^७ = अ^न × अ^म × अ^स = अ^{न+म+स} ।

$$\text{एवमेव } \frac{अ^५ \times अ^६}{अ^७} = \frac{अ^न \times अ^म}{अ^स} = \frac{अ^{न+म}}{अ^स} = अ^{न+म-स} ।$$

$$\text{एवम् } \frac{अ^न}{अ^म} = अ^{न-म} = \frac{१}{अ^{न-म}} ।$$

(६) घातज्ञापकाङ्कवैचित्र्यं प्रदर्श्यते ।

यथा— अ = अ^१, भिन्नयोगक्रमात् १ = $\frac{१}{१} + \frac{१}{१}$

$$\therefore अ^१ = अ^{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}} = अ^{\frac{१}{२}} \times अ^{\frac{१}{२}} = \sqrt{अ} \times \sqrt{अ}$$

$$\therefore \sqrt{अ} = अ^{\frac{१}{२}, \frac{१}{२}} \text{ इदं वर्गमूलज्ञापकं चिह्नम् ।}$$

$$\text{एवं यदि } १ = \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} \text{ तदा } अ^१ = अ^{\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३}}$$

$$\therefore \text{इदं धनमूलज्ञापकम् ।}$$

अथ लघुरिक्थगणितम् = Lagarithms.

(७) नव्यगणिते घाताङ्को घातचिह्नं वा तन्मूलाङ्काधारोपरि तस्याङ्कस्य लघुरिक्थं प्रघातमापकं संप्रतीह त्रिकोणमितौ व्यपदिश्यते ।

यथा— $३^४ = ८१$, अत्र ४ इदं त्र्यङ्काधारोपरि ८१ अस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वाऽस्ति ।

एवमव्यक्तस्थित्या—यदि $अ^क = न$ तदा क-इदम् अ-आधारोपरि-न-इत्यस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वा $\therefore क = लघुअन$ ।

(८) द्वयोरङ्कयोर्गुणनफलस्य लघुरिक्थं तदङ्कयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन समो भवति ।

यथा—यदि $अ^क = न$, $अ^य = म$; तदा $न + म = अ^क + अ^य = अ^{क+य}$, $\therefore क + य = लघुअनम = लघुअन + लघुअम$ ।

(९) लब्धेर्लघुरिक्थं हरस्य लघुरिक्थेनोनितेन भाज्य-लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—यदि $म = अ^य$, $न = अ^क$

तदा $\frac{म}{न} = \frac{अ^य}{अ^क} = अ^{य-क}$. $\therefore लघुअ \frac{म}{न} = लघुअम - लघुअन$ ।

(१०) कस्यापि लघुरिक्थं यदीष्टघातवृद्धिपर्यन्तं वर्धयते तदा तत् तद्घातवृद्धिपर्यन्तं वर्धितस्य तस्य लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा— $न \cdot लघुअम = लघुअ(म^n)$ ।

कल्प्यते— $अ^क = म$ $\therefore क = लघुअम$,

एवम् $म^n = (अ^क)^न = अ^{नक}$

$\therefore लघुअ(म^n) = न \cdot क = न \cdot लघुअम$ ।

व्यक्तस्थित्या— $लघु४८ = लघु(२^४ \times ३) = लघु२^४ + लघु३$
 $= ४लघु२ + लघु३$ ।

$$\begin{aligned}
 \text{लघु } \frac{६३}{४८४} &= \text{लघु } \frac{७ \times ३^२}{२^२ \times ११^२} \\
 &= \text{लघु } ७ + \text{लघु } ३^२ - \text{लघु } २^२ - \text{लघु } ११^२ \\
 &= \text{लघु } ७ + २\text{लघु } ३ - २\text{लघु } २ - २\text{लघु } ११ । \\
 \text{एवम् लघु } \sqrt{१३} &= \text{लघु } १३^{\frac{१}{२}} = \frac{१}{२}\text{लघु } १३ ।
 \end{aligned}$$

(११) साधारणतो दशाङ्काधारोपरि लघुरिक्थस्य नियमोऽस्ति, यत्राधारो न दत्तस्तत्र दशाङ्कोऽध्याह्रियते ।

(१२) लघुरिक्थसंख्यायां पूर्णाङ्कः 'कैरेक्टोरिस्टिक्' (Characteristic) एकश्चान्यो भिन्नाङ्को दशमलवः 'मैण्टीसा' (Mantissa) कथ्यते ।

यथा—लघु ७९५ = २.९००३६७१, अत्र द्वयं पूर्णाङ्कः, ९००३६७१ अयं दशमलवाङ्कः ।

नियताङ्कानां नियतचापांशज्यादीनां च लघुरिक्थार्थं तत्सारण्यवलोक्त्या ।

(१३) कस्यापि नियताङ्कलघुरिक्थे पूर्णाङ्कः सर्वदाऽधोलिखितनियमानुसारेण द्वायते ।

$$\text{यथा—} \therefore १०^० = १ \therefore \text{लघु } १ = ० ।$$

$$\therefore १०^१ = १० \therefore \text{लघु } १० = १ ।$$

$$\therefore १०^२ = १०० \therefore \text{लघु } १०० = २ ।$$

$$\therefore १०^३ = १००० \therefore \text{लघु } १००० = ३ ।$$

$$\therefore १०^४ = १०००० \therefore \text{लघु } १०००० = ४ ।$$

$$\therefore १०^५ = १००००० \therefore \text{लघु } १००००० = ५ ।$$

इत्यादि ।

(१) अत एकमारभ्य दशपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं शून्यत एकपर्यन्तं भवत्यतः पूर्णाङ्कः शून्यं दशमलवाङ्का भवन्ति ।

(२) दशतः शतपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थमेकद्वयान्तस्तत एकः पूर्णाङ्कस्ततोऽग्रे दशमलवाङ्काः ।

(३) शततः सहस्रपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं द्वयत्रयान्तः, एवं सहस्रतो दशसहस्रपर्यन्तमङ्कानां त्रिचतुरन्त एवं पूर्णाङ्कानां दशमलवाङ्कानां विवेकः कर्त्तव्यः । अत्र पूर्णाङ्का दशमलवाङ्काश्च घनात्मका एव ।

(४) एकाल्पानां भिन्नानां लघुरिक्थमृणात्मकं भवति ।

यथा— $\therefore १०^० = १, \therefore \text{लघु } १ = १$

$\therefore १०^{-१} = \frac{१}{१०} = ०.१ \therefore \text{लघु } ०.१ = - १$

$\therefore १०^{-२} = \frac{१}{१०^२} = ०.०१ \therefore \text{लघु } ०.०१ = - २$

$\therefore १०^{-३} = \frac{१}{१०^३} = ०.००१ \therefore \text{लघु } ०.००१ = - ३$

एवमन्यदपि ।

(५) एवमिहैकतः $\frac{१}{१०}$ एतत्पर्यन्तं शून्यत ऋणात्मकैकान्तर्ल-
घुरिक्थं भवत्यतस्तस्य पूर्णाङ्के मस्तकोपरि तिर्यग्रेखा दीयते ।

यथा— $- १ + (\text{यत्किञ्चिद्दशमलवाङ्कः })$

अतोऽत्र पूर्णाङ्कः $= \overline{१}$, एवम् $\overline{२}$, $\overline{३}$ इत्यादि ।

अथ

चतुर्थोऽध्यायः ।

अत्र त्रिभुजगणितं ततो वंशादीनां दैर्घ्योच्छयाद्यवगमकोदाहरणानि चोच्यन्ते ।

त्रिभुजगणितम् ।

५४ । त्रिभुजस्य षण्णामवयवानामन्यतमेभ्यस्त्रिभ्योऽवयवेभ्यः शेषावयवज्ञानाय यद्वर्ण्यते तत् त्रिभुजगणितसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणत्रयमात्रज्ञाने शेषावयवानामनियतत्वान्न तत्र त्रिभुजगणितप्रसक्तिः ।

१ जात्यत्रिभुजगणितम् ।

५५ । जात्यत्रिभुजे एकावयवः समकोणत्वाज्ज्ञात एव शेषाणामन्यतमाभ्यां कोणद्वयेतरावयवाभ्यां शेषावयवावगमः (३७)प्रक्रमतः सुशकः ।

तथा हि, प्रथमः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजो ज्ञातः, तत्संमुखः आकोणश्च ज्ञात इति तदा

$$\left\{ \begin{array}{l} \therefore \text{आ} + \text{का} = \text{गा} = ९०^{\circ} \\ \therefore \text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}, \text{ एवं काकोणो ज्ञायते} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{एवम्} \therefore \quad \text{स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \therefore \text{क} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \\ \text{तथा} \quad \text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \end{array} \right\} \text{अत्र}$$

स्पआ, ज्याआ अनयोरिष्टव्यासार्धे(त्रि)परिणामितयोः सिद्धे क, ग माने

$$\text{क} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} = \frac{\text{त्रि.अ}}{\text{स्पआ}} \quad \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{त्रि.अ}}{\text{ज्याआ}} ।$$

अत्र किल त्रिज्या १०° एतावती कल्प्यते तस्या दशमूलकः
प्रघातमापको दश भवन्ति । अतः क*मानस्य प्रघातमापकः = प्र[†]घादक
= $१० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादस्पआ}$ ।

एवं ग-मानस्य प्रघातमापकः = प्रघादग
= $१० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादज्याआ}$

एवं सर्वत्र प्रघातमापकरूपविधानमवगम्यम् ।
एवं शेषभुजौ ज्ञायेते ।

उदा० । अ[‡] = १२० । आ = ४५° । $१४'$ । $२३''$ शेषावयवाः क
इति प्रश्नः ।

अत्र का = $९०^{\circ} - ४५^{\circ}$ । $१४'$ । $२३''$ = ४४° । $४५'$ । $३७''$
तदा प्रघादक = $१० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादस्पआ}$
= $१० + २^{\circ}०७९१८१२ - १०^{\circ}००३६३४२$
= $\begin{cases} + १२^{\circ}०७९१८१२ \\ - १०^{\circ}००३६३४२ \end{cases}$
= $२^{\circ}०७५५४७०$ = प्रघाद ११९ . . क = ११९ ।

* . . क = $\frac{\text{त्रि.अ}}{\text{स्पआ}}$ अतोऽत्र मद्दर्शितलघुरिक्थगणितस्थौ (८, ९)

नियमाववलोक्यौ ।

† प्रघाद इदं चिह्नं दशमूलकप्रघातमापकद्योतकम् ।

‡ नियताङ्कानां तथा नियतचापांशज्यादीनां च लघुरिक्थार्थमङ्गल-
भाषाबद्धनियमादिका 'चैम्बर्स-मैथेमेटिकल्-टेबल्स' (Chambers's
Mathematical Tables) एतन्नामिका सारण्यवलोक्या । तत्र
दशमलवाङ्कास्तु सन्त्येव पूर्णाङ्कार्थं मद्दर्शितलघुरिक्थगणितस्थ-(१३)
नियमस्य टिप्पण्यवलोक्या ।

$$\begin{aligned}
 \text{अथ च प्रघादग} &= १० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादज्याआ} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases} \\
 &= २२२७८८६७ = \text{प्रघाद} १६९^{\circ} . \text{ ग} = १६९ ।
 \end{aligned}$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः का = $४४^{\circ} । ४५' । ३७''$

$$\text{क} = ११९$$

$$\text{ग} = १६९ ।$$

द्वितीयः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजस्तत्संलग्नः काकोणश्च ज्ञात इति तदाऽत्र
आ = ९०° - का

$$(\text{प्र० ३७}) \left\{ \begin{aligned} \text{स्पका} &= \frac{\text{क}}{\text{अ}} \therefore \text{क} = \text{अ} \cdot \text{स्पका} \\ \text{कोज्याका} &= \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याका}} \end{aligned} \right.$$

क, ग अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघादक} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादस्पका} - १०$$

$$\text{प्रघादग} = १० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादकोज्याका} ।$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । अ = १२० । का = $४४^{\circ} । ४५' । ३७''$ अत्र शेषावयवाः
क इति प्रश्नः ।

$$\text{अत्र आ} = ९०^{\circ} - (४४^{\circ} । ४५' । ३७'') = ४५^{\circ} । १४' । २३''$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटक} &= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटस्पका} - १० \\
 &= २०७९१८१२ + ९९९६३६५८ - १० \\
 &= \begin{cases} + २०७९१८१२ \\ + ९९९६३६५८ \\ - १० \end{cases} \\
 &= \underline{\hspace{1cm}} २०७५५४७० = \text{प्रघाट}११९ \therefore \text{क} = ११९
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटग} &= १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटकोज्याका} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases} \\
 &= \underline{\hspace{1cm}} २२२७८८६७ = \text{प्रघाट}१६९ \therefore \text{ग} = १६९
 \end{aligned}$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° । १४' । २३"

क = ११९

ग = १६९ ।

तृतीयः प्रकारः—

कल्प्यतां गभुजस्तत्संलग्न (आ)-कोणश्च ज्ञाताविति ।

तदाऽत्र का = ९०° - आ

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{अ} = \text{ग} \cdot \text{ज्याआ}$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{क} = \text{ग} \cdot \text{कोज्याआ}$$

प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । ग = १६९ । आ = ४५° । १४' । २३" शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

$$\text{अत्र का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} | १४' | २३'') = ४४^{\circ} | ४५' | ३७''$$

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८५१२९४५ \\ - १० \end{cases}$$

$$= २०७९१८१२ = \text{प्रघाट१२०} \therefore \text{अ} = १२० ।$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८४७६६०३ \\ - १० \end{cases}$$

$$= २०७५५४७० = \text{प्रघाट११९} \therefore \text{क} = ११९ ।$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः का} = ४४^{\circ} | ४५' | ३७''$$

$$\text{अ} = १२०$$

$$\text{क} = ११९ ।$$

चतुर्थः प्रकारः—

कल्प्यताम् अ, गभुजौ ज्ञाताविति

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्, प्रघाटज्याआ = १० + प्रघाटअ - प्रघाटग ।

एवम् आकोणे ज्ञाते ततः का = ९०° - आ

$$\text{प्रघाटक} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटस्पआ} ।$$

एवं काकोण-गभुजौ व्यक्तौ भवतः ।

यद्वा क² = ग² - अ² इति क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य ४७ प्रतिज्ञया

सिद्ध्यति । अतः कोणनिरपेक्षविधिनैव कभुजौ व्यक्तौ भवति ।

उदा० । अ = १२० । ग = १६९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघादज्याभा = १० + प्रघादअ - प्रघादग

$$= १० + २.०७९१८१२ - २.२२७८८६७$$

$$= \begin{cases} + १२.०७९१८१२ \\ - २.२२७८८६७ \end{cases}$$

$$= ९.८५१२९४५ = \text{प्रघादज्या } ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} १४' २३'') = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

अथ च प्रघादक = १० + प्रघादअ - प्रघादस्पआ

$$\therefore \text{क-मानम्} = ११९$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५^{\circ} १४' २३''

$$\text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{क} = ११९$$

$$\text{यद्वा क} = \sqrt{ग^2 - अ^2} = \sqrt{(१६९)^2 - (१२०)^2} = ११९ \text{ सिद्धः}$$

स एव भुजः ।

पञ्चमः प्रकारः—

$$\text{कल्प्यताम् अ, क भुजौ ज्ञाताविति तदा स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \text{ ।}$$

यद्वा प्रघादस्पआ = १० + प्रघादअ - प्रघादक ।

एवम् आ-कोणं ज्ञात्वा ततः

$$\text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}$$

तथा प्रघादग = १० + प्रघादअ - प्रघादज्याभा

एवं का-कोण-ग-भुजौ विज्ञेयौ ।

यद्वा ग^2 = अ^2 + क^2, एवं क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य (४७) प्रतिज्ञया ग-भुजो व्यक्तौ भवति ।

उदा० । अ = १२० । क = ११९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः

अत्र प्रघादस्पआ = १० + प्रघादअ - प्रघादक

$$= १० + २०७९१८१२ - २०७५५४७०$$

$$= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - २०७५५४७० \end{cases}$$

$$= १०००३६३४२ = \text{प्रघादस्प४५}^{\circ} १४' २$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

तथा प्रघादग = १० + प्रघादअ - प्रघादज्याआ । अस्मात् सिद्धं

$$\text{ग-भुजमानम्} = १६९ ।$$

यद्वा ग = $\sqrt{(१२०)^2 + (११९)^2} = १६९$ सिद्धः स एव ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

जात्यत्रिभुजे

ज्ञातावयवाः

शेषावयवाः

$$(१) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = २१ \\ \text{आ} = ४६^{\circ} २३' ५०'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ४३^{\circ} ३६' १०'' \\ \text{क} = २० \text{ । ग} = २९ \end{array} \right\}$$

$$(२) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ \text{आ} = ५४^{\circ} १७' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ३५^{\circ} ४३' \\ \text{क} = ७१^{\circ} ९०' ११'' \\ \text{ग} = १२३^{\circ} १६६६५ \end{array} \right\}$$

$$(३) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३६ \\ \text{का} = ६३^{\circ} ३१' ८'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २६^{\circ} २८' ५२'' \\ \text{क} = २७३ \text{ । ग} = ३०५ \end{array} \right\}$$

$$(४) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३५ \\ \text{का} = २५^{\circ} २३' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ६४^{\circ} ३७' \\ \text{क} = ६४^{\circ} ०५४२८ \\ \text{ग} = १४९^{\circ} ४२५५७ \end{array} \right\}$$

$$(५) \left\{ \begin{array}{l} ग = ५४^{\circ} २१' \\ आ = ३१^{\circ} ४५' २२'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ५८^{\circ} १४' ३७'' \\ अ = २८८ \\ क = ४६५२९ \end{array} \right\}$$

$$(६) \left\{ \begin{array}{l} ग = ९२१७ \\ आ = १^{\circ} ११' ३७'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ८८^{\circ} ४८' २३'' \\ अ = १९२, क = ९२१५ \end{array} \right\}$$

$$(७) \left\{ \begin{array}{l} अ = ४०६० \\ ग = ५७४१ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ४५^{\circ} ०' २५'' \\ का = ४४^{\circ} ५९' ३४'' \\ क = ४०५९ \end{array} \right\}$$

$$(८) \left\{ \begin{array}{l} क = २२४ \\ ग = ७८२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ७३^{\circ} २१' १७'' \\ का = १६^{\circ} ३८' ४३'' \\ अ = ७४९२३५२ \end{array} \right\}$$

$$(९) \left\{ \begin{array}{l} अ = २० \\ क = ९९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ११^{\circ} २५' १६'' \\ का = ७८^{\circ} ३४' ४३'' \\ ग = १०१ \end{array} \right\}$$

$$(१०) \left\{ \begin{array}{l} अ = १६ \\ क = ११५२९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ५४^{\circ} १३' २९'' \\ का = ३५^{\circ} ४६' ३०'' \\ ग = १९७२१ \end{array} \right\}$$

अथाजाल्यस्रगणितम् ।

५६ । अजाल्यस्रस्य त्रिष्ववयवेषु ज्ञातेषु शेषावयवा ज्ञायन्ते तदल्पेषु ज्ञातेषु वा त्रिष्वपि कोणेषु ज्ञातेषु शेषावयवज्ञानं न भवति ।

अजाल्यस्रगणितस्यानेके प्रकारा भवन्ति त उच्यन्ते ।

प्रथमः प्रकारः—

यदा त्र्यस्र एको भुजः अ, कोणद्वयं च आ, का ज्ञातं भवति ।

तदा \therefore आ + का + गा = १८०° \therefore गा = $१८०^\circ - (\text{आ} + \text{का})$

एवं तृतीयकोणो ज्ञायते ।

अथ (३६) प्रक्रमतः $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

\therefore क = $\frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$ अस्य प्रघातमापकरूपम्

प्रघादक = प्रघादअ + प्रघादज्याका - प्रघादज्याआ

साजात्यात् प्रघादग = प्रघादअ + प्रघादज्यागा - प्रघादज्याआ

एवं शेषभुजौ (क, ग) ज्ञायते

उदा०(१) अ = १५° , आ = $६७^\circ १२' ४८''$, का = $५३^\circ ७' ४८''$

शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र गा = $१८०^\circ - (६७^\circ १२' ४८'' + ५३^\circ ७' ४८'')$
 $= १८०^\circ - (१२०^\circ २०' ३६'') = ५९^\circ २९' २३''$

एवं प्रघादक = प्रघादअ + प्रघादज्याका - प्रघादज्याआ

= $१.१७६०९१३ + ९.९०३०९०० - ९.९६५२३७९$

= $\begin{cases} + ११.०७९१८१३ \\ - ९.९६५२३७९ \end{cases}$

= $१.११३९४३४ = \text{प्रघाद} १३ \therefore \text{क} = १३$ ।

प्रघादग = प्रघादअ + प्रघादज्यागा - प्रघादज्याआ

= $१.१७६०९१३ + ९.९३५२७४६ - ९.९६५२३७९$

= $\begin{cases} + ११.१११३६५९ \\ - ९.९६५२३७९ \end{cases}$

= $१.१४६१२८० = \text{प्रघाद} १४ \therefore \text{ग} = १४$ ।

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः} \begin{cases} \text{गा} = ५९^{\circ} । २९' । २३.१'' \\ \text{क} = १३ । ग = १४ । \end{cases}$$

$$\text{उदा०(२)अ} = १०।\text{का} = १२६^{\circ} । ५२' । ११.६'' । \text{गा} = २५^{\circ} । ३' । २७.४''$$

शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अत्र आ} &= १८०^{\circ} - (१२६^{\circ} । ५२' । ११.६'' + २५^{\circ} । ३' । २७.४'') \\ &= १८०^{\circ} - (१५१^{\circ} । ५५' । ३९'') = २८^{\circ} । ४' । २१'' । \end{aligned}$$

$$\text{ततः प्रघाटक} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्याआ}$$

$$= १.००००००० + ९.९०३०९०० - ९.६७२६४११$$

$$= \begin{cases} + १०.९०३०९०० \\ - ९.६७२६४११ \end{cases}$$

$$= १.२३०४४८९ = \text{प्रघाट} १७. \therefore \text{क} = १७ ।$$

$$= \text{प्रघाटग} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्यागा} - \text{प्रघाटज्याआ}$$

$$= १.००००००० + ९.६२६८८३६ - ९.६७२६४११$$

$$= \begin{cases} + १०.६२६८८३६ \\ - ९.६७२६४११ \end{cases}$$

$$= ०.९५४२४२५ = \text{प्रघाट} ९. \therefore \text{ग} = ९$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः} \begin{cases} \text{आ} = २८^{\circ} । ४' । २१'' \\ \text{क} = १७ । ग = ९ । \end{cases}$$

द्वितीयः प्रकारः—

यदा त्र्यस्य भुजौ (अ, क) तयोरन्यतरस्य संमुखकोणश्च (आ)
इति ज्ञातं भवति तदा (३७) प्रक्रमतः

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{ज्याका} = \frac{\text{क.ज्याआ}}{\text{अ}}$$

ततः गा = $१८०^{\circ} - (\text{आ} + \text{का})$ एवं शेषकोणौ ज्ञेयौ ।

अथ
$$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्यागा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\text{अ.ज्यागा}}{\text{ज्याआ}}$$

एवं का, ग अनयोर्मानयोः प्रघातमापकरूपे

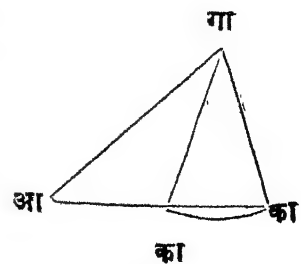
प्रघाद्ज्याका = प्रघाद्ज्याआ + प्रघादक - प्रघादअ ।

प्रघाद्ग = प्रघाद्ज्यागा + प्रघादअ - प्रघाद्ज्याआ ।

अत्रेदमवधेयम् । कोणस्य ज्यायास्तत्कोणोनसमकोणद्वयस्य ज्याया तुल्यत्वाद्त्र ज्यातो लब्धं कामनं साशीतिशताच्छुद्धं काकोणस्य द्वितीयमानं भवति । परं यदि क-भुजात् अ-भुजो लघुः स्यात् । अन्यथा नेति । यतः क-भुजात् अ-भुजस्याल्पत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽल्पः स्यात् । ततः पूर्वसाधितयोः का-कोणमानयोर्योगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् तन्मानयोरैकैकस्य का-कोणादल्पत्वेन आ-कोणेन युतस्य समकोणद्वयाल्पत्वाद्त्र का-कोणमानद्वयसंभवः । परन्तु क-भुजात् अ-भुजस्याधिकत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽधिकः स्यात् । अतस्तेन युतस्य का-कोणद्वितीयमानस्य समकोणद्वयाधिकत्वाद्त्र द्वितीयमानासंभवः ।

इदं पार्श्ववर्त्तिकक्षेत्रस्थितेः सम्यगवगम्यते ।

कल्प्यताम् आकागा-त्रिभुजे आगा-भुजात् कागा-भुजोऽल्प इति । तदा गा-केन्द्रं मत्वा गाका-व्यासार्धेन काका चापे कृते स आका रेखायां आ बिन्दोः का-दिश्येव द्वितीयस्थाने लगति । तथा चोद्दिष्टावयवविशिष्टं त्रिभुजद्वयं सं-



पद्यते । तत्र का-कोणस्य द्वे माने अन्योऽन्यस्पर्धिनी स्पष्टं दृश्येते ।

अथ यदि आगा-भुजात् कागा-भुजो महान् स्यात् तदा आ-बिन्दोर्यस्यां दिशि का-बिन्दुर्वर्त्तते तदन्यदिशि काका-चापस्य आका-रेखया द्वितीयसंपातः स्यात् । तथा च द्वितीयत्र्यस्यसंभवात् का-कोणद्वितीयमानासंभवः ।

एवं यदि काका-चापः आका-रेखां स्पृशेदेव तदा आगा-भुजात् कागा-भुजस्याल्पत्वेऽपि का-कोण एकविध एव भवेत् । यदि च काका-चापः आका-रेखां न स्पृशेन्न वा छिन्द्यात् तदा आकागा-त्रिभुजासंभवात् तदुद्दिष्टं खिलं स्यात् ।

$$\text{उदा० (१) अ} = १० \text{ । क} = १७ \text{ । आ} = २८^{\circ} \text{ । } ४' \text{ । } २१''$$

तदा शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघादज्याका = प्रघादज्याआ + प्रघादक - प्रघादअ

$$= ९^{\circ}६७२६४११ + १^{\circ}२३०४४८९ - १^{\circ}०००००००$$

$$= ९^{\circ}९०३०९०० = \text{प्रघादज्या} ५३^{\circ} \text{ । } ७' \text{ । } ४८'४''$$

$$\text{वा} = \text{प्रघादज्या } १२६^{\circ} \text{ । } ५२' \text{ । } ११'६''$$

अत्र क-भुजात् अ-भुजोऽल्पो भवति

$$\text{अतः का} = ५३^{\circ} \text{ । } ७' \text{ । } ४८'४'' \text{ वा } १२६^{\circ} \text{ । } ५२' \text{ । } ११'६'' \text{ ।}$$

एवमिह का-मानं द्विविधं भवति ।

$$\therefore \text{ गा} = ९८^{\circ} \text{ । } ४७' \text{ । } ५०'६'' \text{ वा } २५^{\circ} \text{ । } ३' \text{ । } २७'४'' \text{ ।}$$

अथ च प्रघादग = प्रघादज्यागा + प्रघादअ - प्रघादज्याआ

$$= \text{प्रघादज्या } (९८^{\circ} \text{ । } ४७' \text{ । } ५०'६'') + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादज्याआ}$$

$$= ९^{\circ}९९४८६०४ + १^{\circ}००००००० - ९^{\circ}६७२६४११$$

$$= १^{\circ}३२२२१९३ = \text{प्रघाद} २१^{\circ} \therefore \text{ ग} = २१$$

यद्वा प्रघादज्या (२५^{\circ} । ३' । २७'४'') + प्रघादअ - प्रघादज्याआ

$$= ९^{\circ}६२६८८३६ + १^{\circ}००००००० - ९^{\circ}६७२६४११$$

$$= ०^{\circ}९५४२४२५ = \text{प्रघाद} ९^{\circ} \therefore \text{ ग} = ९ \text{ ।}$$

एवं सिद्धाः $\begin{cases} \text{का} = ५३^{\circ} ७' ४८'' ४'', \text{वा}, १२६^{\circ} ५२' ११'' ६'' \\ \text{गा} = ९८^{\circ} ४७' ५०'' ६'' \text{ वा } २५^{\circ} ३' २७'' ४'' \\ \text{ग} = २१ \text{ वा } ९. \end{cases}$

उदा० (२) अ = १५। क = १३। आ = ६७°। २२'। ४८'५''
शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघादज्याका = प्रघादज्याआ + प्रघादक - प्रघादअ
= ९९६५२३७९ + १११३९४३४ - ११७६०९१३
= ९९०३०९०० = प्रघादज्या ५३°। ७'। ४८'४''

∴ का = ५३°। ७'। ४८'४'' ।

अत्र क-भुजात् अ-भुजो महानस्ति । अतोऽत्र का-मानमेकविधमेव ।

∴ गा = ५९°। २९'। २३'१'' ।

ततः प्राग्वत् ग = १४ ।

तृतीयः प्रकारः—

यदा त्रिभुजे भुजौ क, ग, तयोरन्तर्गतकोणश्च आ इति ज्ञायते ।

तदा (३६) प्रक्रमतः $\frac{क + ग}{क - ग} = \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} (का + गा)}{\text{स्प } \frac{१}{२} (का - गा)}$

∴ स्प $\frac{१}{२} (का - गा) = \frac{क - ग}{क + ग} \times \text{स्प } \frac{१}{२} (का + गा)$

परन्तु $\frac{१}{२} (का + गा) = ९० - \frac{१}{२} आ ।$

∴ स्प $\frac{१}{२} (का - गा) = \frac{क - ग}{क + ग} \times \text{कोस्प } \frac{१}{२} आ ।$

अस्य प्रघातसापकरूपमिदम् ।

प्रघादस्प $\frac{१}{२} (का - गा)$
= प्रघादकोस्प $\frac{१}{२} आ + प्रघाद(क - ग) - प्रघाद(क + ग)$ एवम-
ज्ञातकोणयोरन्तरार्धं ज्ञायते तयोर्थेनार्धं तु ज्ञातकोणज्ञातमेवास्ति

$$\therefore \text{का} = \frac{१}{२} (\text{का} + \text{गा}) + \frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा}) ।$$

$$\text{गा} = \frac{१}{२} (\text{का} + \text{गा}) - \frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा}) ।$$

एवमज्ञातकोणौ ज्ञायेते ।

ततः प्रथमप्रकारेण तृतीयभुजज्ञानं सुलभम् ।

अथात्र यद्युद्दिष्टावयवैः शेषकोणनिरपेक्षमेव तृतीयभुजज्ञानमिष्टं तदा तत् (३८) प्रक्रमोक्तादस्मात् $a^2 = c^2 + g^2 - २कग \cdot कोज्याआ$, समीकरणाज्ज्ञायते । परं न ह्यस्य समीकरणस्य प्रघातमापकरूपं संपद्यत इतीदं समीकरणं तथा परिणाम्यते यथाऽस्मात् प्रघातमापकद्वारा तृतीयभुजज्ञानं स्यात् स परिणामो द्विविधः ।

तत्रादावाद्यः प्रदर्श्यते—

$$\begin{aligned} (प_१) \quad a^2 &= c^2 + g^2 - २कग \cdot कोज्याआ \\ &= c^2 - २कग + g^2 + २कग (१ - कोज्याआ) \\ &= (क - ग)^2 + ४कग \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \\ &= (क - ग)^2 \left\{ १ + \frac{४कग}{(क - ग)^2} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \right\} \end{aligned}$$

अत्र $\frac{४कग}{(क - ग)^2} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$, इदं धनमस्ति । अतस्तत्स्थाने

(स्प^२इ) कल्प्यते तदा

$$a^2 = (क - ग)^2 (१ + स्प^२इ) = (क - ग)^2 \cdot छे^२इ ।$$

$$\therefore a = (क - ग) छेइ ।$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$\text{प्रघाद}a = \text{प्रघाद}(क - ग) + \text{प्रघाद}छेइ - १० ।$$

$$\text{अथ } \therefore स्प^२इ = \frac{४कग}{(क - ग)^2} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$$

$$\therefore \text{स्पइ} = \frac{२ \sqrt{\text{कग}}}{\text{क} - \text{ग}} \cdot \text{ज्या}^{\frac{१}{२}} \text{ आ ।}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$\begin{aligned} \text{प्रघादस्पइ} &= \text{प्रघाद२} + \frac{१}{२} \text{प्रघादक} + \frac{१}{२} \text{प्रघादग} \\ &+ \text{प्रघादज्या}^{\frac{१}{२}} \text{ आ} - \text{प्रघाद}(\text{क} - \text{ग}) \end{aligned}$$

एवम् (इ) माने ज्ञाते ततः

$$\text{प्रघादअ} = \text{प्रघाद}(\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघादछेइ} - १० ।$$

अस्मिन् परिणामे यदि (क - ग) अल्पं स्यात् तदा (स्पइ) महत् स्यात् ततो लब्धम् (इ) मानं स्थूलं स्यात् ततः (क) मानमपि स्थूलं स्यात् ।

अथातो द्वितीयपरिणाम उच्यते—

$$\begin{aligned} (\text{प२}) \text{ अ}^२ &= \text{क}^२ + \text{ग}^२ - २\text{कग} \cdot \text{कोज्याआ} \\ &= \text{क}^२ + २\text{कग} + \text{ग}^२ - २\text{कग}(\text{१} + \text{कोज्याआ}) \\ &= (\text{क} + \text{ग})^२ - ४\text{कग} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \end{aligned}$$

$$= (\text{क} + \text{ग})^२ \left\{ १ - \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \right\}$$

अथ यतः (क + ग)^२ अस्मात् (४कग) इदं सदैवालपं भवति ।

अतः $\frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ}$ इदं रूपादल्पं स्यात्

$$\therefore \text{कल्प्यताम्} — \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} = \text{ज्या}^२ \text{इ}$$

$$\text{तदा अ}^२ = (\text{क} + \text{ग})^२ (१ - \text{ज्या}^२ \text{इ}) = (\text{क} + \text{ग})^२ \text{कोज्या}^२ \text{इ}$$

$$\therefore \text{अ} = (\text{क} + \text{ग}) \text{कोज्याइ} ।$$

अथ ज्याइ, अ, अनयोर्मोनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघादज्याइ} = \text{प्रघाद२} + \frac{१}{३} \text{प्रघादक} + \frac{१}{३} \text{प्रघादग} \\ + \text{प्रघाद(कोज्या } \frac{१}{३} \text{ आ)} - \text{प्रघाद(क + ग)} ।$$

$$\text{प्रघादअ} = \text{प्रघाद(क + ग)} + \text{प्रघादकोज्याइ} - १० ।$$

$$\text{उदा० । क} = ८२ । \text{ग} = २१ । \text{आ} = १०२^{\circ} । ४०' । ४९'४'' \text{ तदा}$$

शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अत्र प्रघादस्प } \frac{१}{३} (\text{का} - \text{गा}) &= \text{प्रघादकोस्प } \frac{१}{३} \text{ आ} \\ + \text{प्रघाद(क - ग)} - \text{प्रघाद(क + ग)} \\ &= \text{प्रघादकोस्प (५१}^{\circ} । २०' । २४'') + \text{प्रघाद६१} - \text{प्रघाद१०३} \\ &= ९९०३०९०० + १७८५३२९८ - २०१२८३७२ \\ &= \begin{cases} + ११६८८४१९८ \\ - २०१२८३७२ \end{cases} \\ &= + ९६७५५८२६ = \text{स्प } २५^{\circ} । २१' । ३५'' । \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{१}{३} (\text{का} - \text{गा}) = २५^{\circ} । २१' । ३५'' ।$$

$$\text{अथ च } \frac{१}{३} (\text{का} + \text{गा}) = ९०^{\circ} - \frac{१}{३} \text{आ} = ३८^{\circ} । ३९' । ३५३''$$

$$\therefore \begin{aligned} \text{का} &= ६४^{\circ} । ०' । ३८८'' \\ \text{गा} &= १३^{\circ} । १८' । ३१८'' । \end{aligned}$$

$$\text{अतः प्रथमप्रकारेण सिद्धस्तृतीयभुजः अ} = ८९ ।$$

अथाद्यपरिणामतस्तृतीयभुजज्ञानार्थं न्यासः ।

$$\text{प्रघादस्पइ} = \text{प्रघाद२} + \frac{१}{३} \text{प्रघादक} + \frac{१}{३} \text{प्रघादग} + \text{प्रघादज्या } \frac{१}{३} \text{आ} \\ - \text{प्रघाद(क - ग)}$$

$$\begin{aligned} &= ३०१०३०० + ६६११०९६५ + ९५६९०६९५ + ९८९२५७८१ \\ &\quad - १७८५३२९८ \\ &= ११८११६२४७ - १७८५३२९८ = १००२६२९४९ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{स्प} (४६^{\circ} | ४४' | ४७'') \therefore \text{इ} = ४६^{\circ} | ४४' | ४७'' \\
 \text{अथ प्रघाटअ} &= \text{प्रघाट} (\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघाटछेइ} - १० \\
 &= १७८५३२९८ + १०१६४०६०२ - १० \\
 &= १९४९३९०० = \text{प्रघाट} ८९ \therefore \text{अ} = ८९
 \end{aligned}$$

सिद्धस्तृतीयभुजः स एव ।

एवं द्वितीयपरिणामतोऽपि स एव भुजो लभ्यते ।

चतुर्थः प्रकारः—

यदा त्रिभुजस्य त्रयो भुजाः (अ, क, ग) ज्ञाता भवन्ति तदा आ-कोणज्ञानमधोलिखिताभिरुन्मितिभिः प्रत्येकं जायते ।

$$\text{ज्याअ} = \frac{२}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \quad (१)$$

$$\text{ज्या}\frac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}} \quad (२)$$

$$\text{कोज्या}\frac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}} \quad (३)$$

$$\text{स्प}\frac{१}{२}\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} \quad (४)$$

अत्र प्रथमोन्मितेरुपपत्तिः (३९) प्रक्रमे द्रष्टव्या द्वितीयादीनां च (४०) प्रक्रमे विलोक्या ।

अथ यदा आ-कोणः समकोणासन्नो न स्यात् तदा प्रथमोन्मिते-स्तदानयनं कर्तुं युज्यते यतः समकोणासन्नकोणाज्याया धनुः सारणीतः सूक्ष्मं न लभ्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणासन्नः स्यात् तदा द्वितीयतृतीयो-न्मितिभ्यां प्रत्येकं तदानयनं कर्तुं युज्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणद्वयासन्नो न स्यात् तदा चतुर्थोन्मिते-
स्तदानयनं कर्तुं युज्यते ।

अथासामुन्मितीनां क्रमेण प्रघातमापकरूपाणि ।

$$(१) \text{ प्रघादज्याआ} = १० + \text{प्रघाद}२ + \frac{१}{३} \left\{ \text{प्रघादस} + \text{प्रघाद}(स - अ) \right. \\ \left. + \text{प्रघाद}(स - क) + \text{प्रघाद}(स - ग) \right\} - (\text{प्रघादक} + \text{प्रघादग}) ।$$

$$(२) \text{ प्रघादज्या} \frac{१}{३} \text{आ} = \frac{१}{३} \left\{ २० + \text{प्रघाद}(स - क) + \text{प्रघाद}(स - ग) \right. \\ \left. - (\text{प्रघादक} + \text{प्रघादग}) \right\} ।$$

$$(३) \text{ प्रघादकोज्या} \frac{१}{३} \text{आ} = \frac{१}{३} \left\{ २० + \text{प्रघादस} + \text{प्रघाद}(स - अ) \right. \\ \left. - (\text{प्रघादक} + \text{प्रघादग}) \right\} ।$$

$$(४) \text{ प्रघादस्प} \frac{१}{३} \text{आ} = \frac{१}{३} \left\{ २० + \text{प्रघाद}(स - क) \right. \\ \left. + \text{प्रघाद}(स - ग) - \text{प्रघादस} - \text{प्रघाद}(स - अ) \right\} ।$$

साजात्यात् का गा-कोणयोरपि माने एवं ज्ञातुं शक्येते ।

उदा० । यत्र त्रिभुजे अ = २५ । क = १७ । ग = २८ ।

तत्र त्रयः कोणाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रथमोन्मित्योत्तरावगमाय न्यासः ।

$$स = \frac{१}{३} (२५ + १७ + २८) = ३५ ।$$

$$\therefore स - अ = १० ।$$

$$स - क = १८ ।$$

$$स - ग = ७ ।$$

अथ च

$$\begin{aligned}
\text{प्रघाट्याआ} &= १० + \text{प्रघाट} २ + \frac{१}{३} \left\{ \text{प्रघाटस} + \text{प्रघाट}(स - अ) \right. \\
&+ \text{प्रघाट}(स - क) + \text{प्रघाट}(स - ग) - (\text{प्रघाटक} + \text{प्रघाटग}) \left. \right\} \\
&= १० + ३०१०३०० \\
&+ \frac{१}{३} \left\{ १.५४४०६८० + १.००००००० + १.२५५२७२५ + ८४५०९८० \right\} \\
&\quad - (१.२३०४४८९ + १.४४७१५८०) \\
&= १०.३०१०३०० + २.३२२२१९३ - २.६७७६०६९ \\
&= ९.९४५६४२४ = \text{प्रघाट्याआ} (६१^{\circ} ५५' ३९'')
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{आ} = ६१^{\circ} ५५' ३९''$$

$$\text{ततः प्रथमप्रकारेण सिद्धम् का} = ३६^{\circ} ५२' ११.६५''$$

$$\therefore \text{गा} = ८१^{\circ} १२' ९.३५''$$

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

उद्दिष्टावयवाः ।

शेषावयवाः ।

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} \text{आ} &= ५०० \\ (१) \text{ आ} &= ८५^{\circ} ४७' \\ \text{का} &= ५७^{\circ} २५' \end{aligned} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{गा} &= ३६^{\circ} ४८' \\ \text{क} &= ४२२.४४८१ \\ \text{ग} &= ३००.३२४७ \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} \text{अ} &= ३२७ \\ (२) \text{ का} &= २६^{\circ} ८' ५५'' \\ \text{गा} &= २३^{\circ} ३२' ५'' \end{aligned} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{आ} &= १३०^{\circ} १९' \\ \text{क} &= १२९ \\ \text{ग} &= १७१.२४७३ \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} \text{अ} &= ८५ \\ (३) \text{ क} &= १०० \\ \text{आ} &= ३७^{\circ} २९' \end{aligned} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{का} &= ४५^{\circ} ४३' ६.६'' \text{ वा} \\ &= १३४^{\circ} १६' ५३.४'' \\ \text{गा} &= ९६^{\circ} ४७' ५३.४'' \text{ वा} \\ &= ८^{\circ} १४' ६.६'' \\ \text{ग} &= १३८.६९८७ \text{ वा} \\ &= २०.००७३६ \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

उद्दिष्टावयवाः ।

शेषावयवाः ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८५ \\ (४) \text{ क} = २०२ \\ \text{आ} = ११^{\circ} १२५' १६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २८^{\circ} १४' २१'' \text{ वा} \\ \quad = १५१^{\circ} ५५' ३९'' \\ \text{गा} = १४०^{\circ} ३०' २३'' \text{ वा} \\ \quad = १६१^{\circ} ३९' ५'' \\ \text{ग} = २७३ \quad \text{वा} \\ \quad = १२३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८९ \\ (५) \text{ क} = ६५ \\ \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' ११'' ६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २५^{\circ} ५९' २१'' २५'' \\ \text{गा} = ११७^{\circ} १८' २७'' १५'' \\ \text{ग} = १३२ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क} = १२५ \\ (६) \text{ ग} = १५० \\ \text{आ} = ३०^{\circ} \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ५५^{\circ} १०' १२'' \\ \text{गा} = ९४^{\circ} ४९' ५८'' \\ \text{अ} = ७६^{\circ} १४३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १३ \\ (७) \text{ क} = २० \\ \text{गा} = ७५^{\circ} ४५' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' १२'' \\ \text{का} = ६७^{\circ} २२' ४८'' \\ \text{ग} = २१ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ (८) \text{ क} = १०१ \\ \text{ग} = १०२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५९^{\circ} १' २०'' \\ \text{का} = ५९^{\circ} ५९' २५'' \\ \text{ग} = ६०^{\circ} ५९' १५'' \end{array} \right.$$

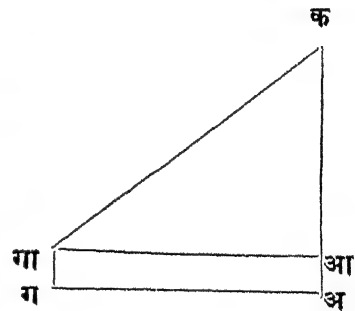
$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३७ \\ (९) \text{ क} = १५ \\ \text{ग} = ४४ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५३^{\circ} ७' ४८'' ३'' \\ \text{का} = १८^{\circ} ५५' २८'' ७'' \\ \text{गा} = १०७^{\circ} १६' ४३'' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३४२०२०१ \\ (१०) \text{ क} = ८६६०२५४ \\ \text{ग} = ९८४८०७८ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २०^{\circ} \\ \text{का} = ६०^{\circ} \\ \text{गा} = १००^{\circ} \end{array} \right.$$

५७ । अजात्यत्र्यस्य शेषावयवाजात्यत्र्यस्रगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रैष्टकोणात् तत्संमुखभुजे लम्बं निपात्य द्वे त्र्यस्रे उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौ-
च्छस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तथोच्यते । तदर्थमादौ
कस्य चित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं
चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलयष्ट्या
वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयषष्ठादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् (अक) सरलवंशस्यौच्छयं ज्ञातव्यं
तदा (अ) स्थानात् समानभूमौ सरलयष्ट्या (अग) प्रदेशं गणयित्वा
(ग) स्थानात् (क) वंशाग्रस्योन्नतिं
तुरीयेण षष्ठेन वा विद्वयेत् तदा यदि
(अग) दैर्घ्यं (अ) तुल्यं स्यात्
(क) स्य उन्नतिश्च (क°) स्यात्
(गगा) दृष्ट्युच्छ्रितश्च (ग) स्यात्
तदा (प्रक्र० ५० प्रका० २)



$$\text{आक} = \text{आगा.स्प} \angle \text{आगाक} = \text{अग.स्प} \angle \text{आगाक} \\ = \text{अ.स्पक}$$

$$\therefore (\text{अक}) \text{ औच्छयम्} = \text{अ.स्पक} + \text{ग}$$

एवमौच्छयं ज्ञायते ।

एवं दृक्समसूत्रादुच्चतरवस्तुनो गणितागतमौच्छयमानं दृष्ट्यु-
च्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । दृक्समसूत्रादधस्तनवस्तुनो गणितागतं
मानं च दृष्ट्युच्छ्रायेण विश्लेषितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = ३½ हस्ताः

तदा आक = २५ × स्प ३०°

वा प्रघाट् आक = प्रघाट् २५ + प्रघाट् स्प ३०° - १०

$$= १३९७९४०० + ९७६१४३९४ - १०$$

$$= ११५९३७९४ = प्रघाट् १४४३३७६$$

∴ वंशौच्छयम् = १४४३३७६ + ३५ = १७९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्त्तमानस्य कस्यचित् प्रासादस्यौच्छयं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम् (ग)-स्थानात् (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (आ) । ततः (अ)-मूलाद्यस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्त्तते तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-

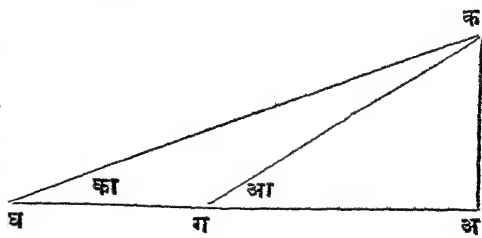
स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-

मितदेशं गत्वा (घ)-

स्थानात् पुनः (क)

अग्रवेधे लब्धा अंशाः

(का) इति ।



तत्र यदि औच्छयं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०) } \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \text{य} = (\text{कग.ज्याआ}) = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}} ।$$

$$\text{एवम्} \quad \text{र} = \text{कग.कोज्याआ} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघादय} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

$$\text{प्रघादर} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादकोज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

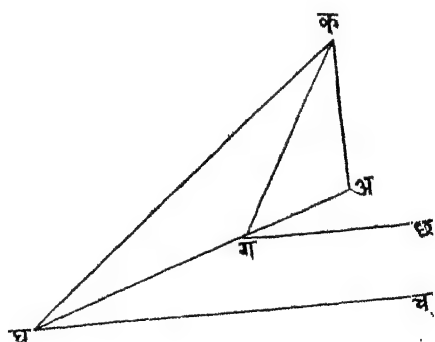
यदीह— $\alpha = 40^\circ$ । $\alpha' = 30^\circ$ । $24'$ । $\kappa = 19^\circ$ । $34'$ ।

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्च्यमानम्, य = ४५.१४३ हस्ताः ।

तथा (ग)-स्थानात् दूरत्वम्, $r = ७६.८९३$ हस्ताः ।

उदा० (३) कस्याश्चित् (अघ) क्रमनिम्नोर्व्या भूपृष्ठे प्रावण्यं
(अघच) किल (आ) अंशाः, तथा (अघ) भूमौ वर्तमानस्य
(अक) गृहादेरौच्छ्यदूरत्वयोरवगमाय तद्भूस्थेनैव द्रष्टा (ग)-
स्थानात् (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः (कगल)=(का)

अंशाः, ततः (अग)
दिश्येव (ग) स्थानात्
(घ)-स्थान पर्यन्तम्(अ)
हस्तमितदेशं गत्वा पुनः
(क)अग्रवेधे कृते लब्धाः
किलोन्नतांशाः (कघच)
= (गा) । तत्र यदि
औच्चयम् (अक) =
य, दूरत्वम् (अग) = र,



$$\text{तदा य} = \frac{\text{कग.ज्याअगक}}{\text{ज्याकअघ}} = \frac{\text{कग.ज्या (का - आ)}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\text{परन्तु कग} = \frac{\text{गघ.ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{अ.ज्या(गा - आ)}}{\text{ज्या(का - गा)}}$$

$$\therefore y = \frac{\text{अ.ज्या}(का - आ) \cdot \text{ज्या}(गा - आ)}{\text{कोज्याआ} \cdot \text{ज्या}(का - गा)} \quad ।$$

$$\text{एवम् } r = \frac{\text{कग.ज्याअकग}}{\text{ज्याअकग}}$$

$$= \frac{\text{अ.ज्या}(गा - आ) \cdot \text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(का - गा) \cdot \text{कोज्याआ}} \quad ।$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\begin{aligned} \text{प्रघादय} &= \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्या}(का - आ) + \text{प्रघादज्या}(गा - आ) \\ &\quad - \text{प्रघादकोज्याआ} - \text{प्रघादज्या}(का - गा) \quad । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रघादर} &= \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्या}(गा - आ) + \text{प्रघादकोज्याका} \\ &\quad - \text{प्रघादज्या}(का - गा) - \text{प्रघादकोज्याआ} \quad । \end{aligned}$$

यद्यत्र अ = ५० हस्ताः, आ = ३०°, का = ६२° । ३०', गा = ५०° । १५'

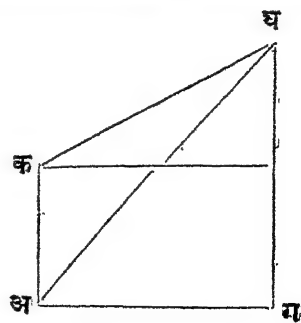
तदोत्थापनेन सिद्धमौच्च्यमानम् य = ५०.६०३ ।

एवम् (ग) दूरत्वमानम् र = ४३.४८८ ।

उदा० (४) समभूस्थमवगतौच्च्यमल्पपर्वतमारुह्य भूस्थसरलवं-

शस्याग्रमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसू-
त्रादधरांशान्*विद्ध्वा तद्वंशस्यौ-
च्च्यमानं ज्ञातव्यम् ।

यथाऽत्र किल (गघ)-पर्वतौ-
च्च्यम् = अ । (घ)-स्थानात् (अक)-
वंशस्य मूलाग्रवेधे लब्धे क्रमेणाध-
रांशमाने (घअग) = आ, (घअच) =
का । (अक) वंशौच्च्यम् = य



* पर्वताग्निलम्ब्वरूपं कीलकाग्रं पश्यन् समभूस्थितवंशमूलं यष्ट्या
विद्धयेत् । एवं तद्वंशाग्रमपि । तत्र दृष्टिलग्नं कीलकाग्रयष्ट्युत्पन्न-
कोणकोट्यंशा एवाधरांशा इति ।

$$\text{तदा } \frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{१}{\text{ज्याअग}} = \frac{१}{\text{ज्याआ}} \quad \therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}$$

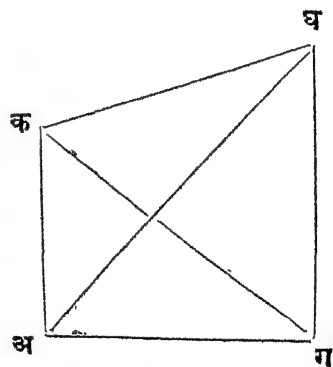
$$\text{एवम् } \frac{\text{अक}}{\text{अघ}} = \frac{\text{ज्याअघक}}{\text{ज्याअकघ}} = \frac{\text{ज्या(आ - का)}}{\text{कोज्याका}} \quad ।$$

$$\therefore \text{अक} = \text{य} = \frac{\text{अ.ज्या(आ - का)}}{\text{ज्याआ.कोज्याका}} \text{अस्य प्रघातमापकरूपं}^*$$

सुगमतरम् ।

उदा० (५) अज्ञातौ च्छ्याल्पपर्वतशिखरमारुह्य समभूस्थितयोरवगतान्तरयोर्वृक्षमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशमाने द्रष्टुर्वृक्षमूलपर्वन्तयोर्दृक्सूत्रयोरन्तर्गतकोणं चावगत्य तत्पर्वतौच्छ्यं कथमवगम्यमिति प्रश्नः ।

यथा किलात्र अ, क वृक्षमूलयोरन्तरं, अक = अ । (गघ) पर्वतस्य (घ)-शिखरे स्थित्वा अ, क मूलयोर्वेधे कृते लब्धे क्रमेण दृक्समसूत्रादधरांशमाने आ, का तथा \angle अघक = गा, (गघ) पर्वतौच्छ्यम् = य,



तदा अकघत्रिभुजे अघ = य.कोलेआ, कघ = य.कोलेका †

* प्रघादय = प्रघादअ + प्रघादज्या(आ - का) - प्रघादज्याआ - प्रघादज्याका, एतत् तु सुगमतरमत एव यतस्तत्र पर्वतौच्छ्याधरांशमानकल्पनमपि सुगमम् ।

† त्रिभुजे भुजत्रयमानेषु ज्ञातेषु यस्य कोणस्य कोटिज्याऽपेक्ष्यते (३८) प्रक्रमतस्तत्कोणात्पादकभुजवर्गयोगस्तत्कोणसंमुखभुजवर्गोन-

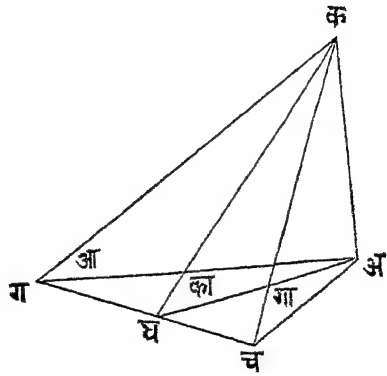
∴ अ^२

= य^२·कोछे^२आ + य^२·कोछे^२का - २य^२·कोछेआ·कोछेका·कोज्यागा ।

∴ य = $\frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{आ} + \text{कोछे}^2\text{का} - २\text{कोछेआ} \cdot \text{कोछेका} \cdot \text{कोज्यागा}}}$ इत्युत्तरम् ।

उदा० (६) (अगच) समभुवि स्थितस्य (अक)-वंशादेः (क)

अग्रे (गच) सरलरेखास्थेषु
ग, घ, च, स्थानेषु स्थित्वा
विद्धे लब्धाः क्रमेणांशाः
आ, का, गा, । एवं (गघ)
(घच) रेखयोर्गणने लब्धा
हस्ताः अ, क । अत्रैभ्यः
(अक) वंशादेरौच्छयमव-
गम्यम् ।



तदा कल्प्यतामत्र (अक)
औच्छयम् = य

∴ अग = य·कोस्पआ, अघ = य·कोस्पका, अच = य·कोस्पगा ।

अत्र यतः कोज्याअघग = $\frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{गघ}}$

कोज्याअघच = $\frac{\text{अघ}^2 + \text{घच}^2 - \text{अच}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{घच}}$ ।

एवम् कोज्याअघग = - कोज्याअघच

स्तन्निर्दिष्टकोणात्पादकभुजघातेन द्विगुणेन भक्तस्तत्कोणकोटिज्या

यथा— कोज्यागा = $\frac{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - \text{अ}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{कघ}}$ अत उत्थापनेन ।

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{घच}} *$$

अत्रत्यपदानि पूर्वसाधितैस्तत्तदुन्मानैरुत्थाप्य समीक्रियया लब्ध-
मौच्छ्यमानम्,

$$य = \sqrt{\frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - (\text{अ} + \text{क}) \text{कोस्प}^2 \text{का} + \text{क} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ}}}$$

उदा० (७) पारेनदि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोः अ, क वृक्षयोरन्तर-

$$* \therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{२\text{अघ} \cdot \text{घच}},$$

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{\text{घच}},$$

$$\therefore \text{अघ}^2 \cdot \text{घच} + \text{गघ}^2 \cdot \text{घच} - \text{अग}^2 \cdot \text{घच} = \text{अच}^2 \cdot \text{गघ} - \text{अघ}^2 \cdot \text{गघ} - \text{घच}^2 \cdot \text{गघ},$$

$$\therefore \text{गघ}^2 \cdot \text{घच} + \text{घच}^2 \cdot \text{गघ} = \text{गघ} \cdot \text{घच} (\text{गघ} + \text{घच}) = \text{अक} (\text{अ} + \text{क})$$

$$= \text{अच}^2 \cdot \text{गघ} + \text{अग}^2 \cdot \text{घच} - \text{अघ}^2 \cdot \text{घच} - \text{अघ}^2 \cdot \text{गघ}$$

$$= \text{गघ}(\text{अच}^2 - \text{अघ}^2) - \text{घच}(\text{अघ}^2 - \text{अग}^2)$$

$$= \text{गघ}(\text{य}^2 \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - \text{य}^2 \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का}) - \text{घच}(\text{य}^2 \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का} - \text{य}^2 \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ})$$

$$= \text{य}^2 (\text{गघ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - \text{गघ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का} - \text{घच} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का} + \text{घच} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ})$$

$$= \text{य}^2 (\text{अ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - \text{अ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का} - \text{क} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{का} + \text{क} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ})$$

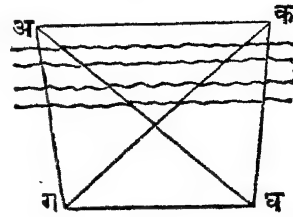
$$= \text{य}^2 (\text{अ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - (\text{अ} + \text{क}) \text{कोस्प}^2 \text{का} + \text{क} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$$

$$\therefore \text{य}^2 = \frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{गा} - (\text{अ} + \text{क}) \text{कोस्प}^2 \text{का} + \text{क} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{आ}} \quad \text{एतत्पदं}$$

(य) मानमाकरे स्पष्टम् ।

† अघ, अग, अच, गघ, घच इमानि स्वरूपाणि ।

प्रदेशस्यावगमाय तत्समभूदेशेऽवाक्तीरे (गघ)-रेखाम् (अ)-हस्तमितां
गणयित्वा (ग)-स्थानात् गणितयोः
(अगघ), (कगघ) कोणयोः
क्रमेणांशाः (आ, का) ततः (घ)-
स्थानाच्च (कघग), (अघग)
कोणयोः क्रमेणांशाः (गा, घा) एभ्यः
(अ, क) वृक्षयोरन्तरमवगम्यम् ।



तदा (अगघ) त्रिभुजात् सिद्धम् $\frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याअगघ}}{\text{ज्यागअघ}}$

$$\therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\text{ज्या(आ + गा)}} ।$$

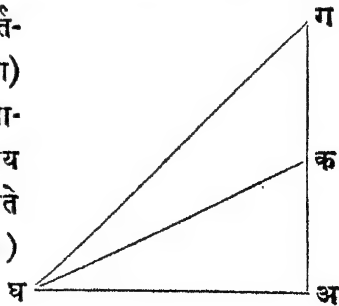
एवमेव (कगघ) त्रिभुजात् सिद्धम् $\text{कघ} = \frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्या(का + गा)}} ।$

एवम् (अघ), (कघ) भुजौ तदन्तर्गतः (अघक) कोणश्चैतेभ्यः
(अक) भुजावगमः (३८) प्रक्रमतः सुगमः ।

तथा हि— $\text{अक}^2 = \text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्याअघक}$

$$\therefore \text{अक} = \sqrt{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्या(गा - घा)}} ।$$

उदा० (८) (घअ) समभुवि वर्त्त-
मानस्य (अकग) गृहादेः (अक), (कग)
प्रदेशौ क्रमेण अ, क हस्तपरिमिता-
वगमतौ । तत्र तद्गृहादेर्दूरत्वावगमाय
(घ) स्थानात् (कघग) कोणे मापिते
लब्धा अंशाः (आ) तथा च (घअ)
दूरत्वं कियत् स्यादिति प्रश्नः



अत्र किल य = घअ-प्रदेशहस्ताः ।

$$\text{तदा स्पकघग} = \text{स्प}(\text{अघग} - \text{अघक}) = * \frac{\text{स्पअघग} - \text{स्पअघक}}{१ + \text{स्पअघग.स्पअघक}}$$

$$\text{परमत्र स्पअघग} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}}, \text{स्पअघक} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$\therefore \text{उत्थापनेन, स्पआ} = \frac{\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{कय}}{\text{य}^2 + \text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$$

अस्मात् समीकरणतो लब्धं (य) मानम्

$$= \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^2 - ४\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}}{२\text{स्पआ}}$$

अत्र (स्पआ) अस्य मानं यथा— $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}}$ अस्मा-

दूने तेन समं वा ततोऽधिकं वा स्यात् तथा (य) मानं क्रमेण द्विविधमेकविधमसंभवं च बोध्यम् ।

तदेकविधमानं च $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$ एतत् स्यात् ।

एतत्प्रश्नोत्तरं क्षेत्रमितिरीत्याऽपि झटित्यवगम्यते ।

तथा हि— (कग) रेखोपरि तथा वृत्तखण्डं कार्यं यथा तद्रेखायां वर्तमानः तत्खण्डपरिधिलग्नः कोणः (आ) अंशपरिमितः स्यात् । ततः (अ)-स्थाने लम्बः कार्यः । तेन लम्बेन तद्वृत्तखण्डे छिन्ने स्पृष्टेऽस्पृष्टे वा (अघ) मानं द्विविधमेकविधमसंभवं वेति स्पष्टमवगतं स्यात् ।

अथ लम्बेन वृत्तखण्डे स्पृष्ट एकविधम् (अघ) दूरत्वमानमिदं $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$ क्षेत्रमिति तृतीयाध्यायस्य षट्त्रिंशत्प्रतिज्ञया स्पष्टम् ।

* एतदर्थं २० पृष्ठस्थ ४ पङ्क्तिर्विच्छेद्या ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

(१)* यस्यायतक्षेत्रस्य कोटिः ५० (अ) हस्ताः । तस्य कोट्येक-
प्रान्ते स्थित्वा संमुखकोटिप्रान्तयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ३०°
(आ) तथा च तस्य भुजप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{भुजः} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पअ}} = ५०\sqrt{३} = ८६.६०२५४ \text{ हस्ता इत्युत्तरम् ।}$$

(२) पूर्वापरायताया भित्तेर्दक्षसूत्रादुच्छ्रितिः १५ (अ) हस्ताः ।
तस्या भित्तेर्दक्षिणपार्श्वे ३५ (क) हस्तान्तरे देशे स्थित्वा ध्रुवतारायां
विलोकितायां सा भित्त्यूर्ध्वप्रान्तलग्ना दृष्टा तत्र तदानीं ध्रुवोन्नतिः
कियती स्यादिति प्रश्नः ।

$$\text{ध्रुवोन्नतिः} = +\text{स्प}^{-१} \frac{\text{अ}}{\text{क}} = २३^{\circ} ११' ५५'' \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(३) कस्यचिद्वंशादेरौच्च्यावगमाय गणकस्तत्समभुवि सरलप्रदेशं
२०० (अ) हस्तमितं गणयित्वा तत्प्रदेशैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य
वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणम् ५०° । १२' (आ) अंशमितं विध्वा तत्प्र-
देशापरप्रान्ताच्च तदाद्यप्रान्तस्य वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणम् ४०° ।
२५' (का) अंशमितं वंशाद्यग्रस्य चोन्नतिम् ५७° । ४०' (गा) अंश-
मितां ज्ञातवान् । तथा च तस्य वंशादेरौच्च्यं कियत् स्यादिति प्रश्नः ।

* सर्वेषां प्रश्नानां सोपपत्तकान्युत्तराणि प्रश्नान्ते विलोक्यानि ।

† यावतः कोणस्य चापस्य वा स्पर्शरेखा $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ स्यात् तावतो द्योतकं

स्प - १ $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ एतत् स्यात् । एवं ज्या - १ $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ । कोज्या - १ $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इत्यादीनि को-

ज्यादीनां कोणांश्चापान् वा द्योतयन्तीति ।

$$\text{वंशाद्यौच्च्यम्} \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्यागा}}{\text{ज्या(आ + का)}} = १२९'८४ \text{ हस्ताः ।}$$

(४) पारेदुस्तरनदि किञ्चिद्गृहादि वर्त्तते तस्यावाक्तीराद्दूर-
त्वावगमायावारतीरे १०० (अ) हस्तमितं तिर्यक्प्रदेशं विगणय्य
तत्प्रदेशैकैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य गृहादेशचान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे
क्रमेण कोणमाने ४०° । २५' (आ), ३७° । ४८' (का) तथा च तत्त-
त्प्रदेशप्रान्तात् तद्गृहं कियति कियत्यन्तरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{प्रथमप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ + का)}} = ६२'६१०१ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{द्वितीयप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\text{ज्या(आ + का)}} = ६६'२२९८२ \text{ हस्ताः ।}$$

(५) कस्याश्चिद्दुस्तरनद्याः पात्रविस्तृत्यवगमायावाक्तीरे ६०
(अ) हस्तमितं तिर्यक् प्रदेशं विगणय्य तत्तत्प्रदेशप्रान्तात् तदपरप्रा-
न्तस्य परतीरवर्त्तिनः कस्याचित् प्रस्तरादेश्चान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे
क्रमेण कोणमाने ४२° । १७' (आ) । ५२° । ३५' (का) तथा च
तस्या नद्याः कियती विस्तृतिरिति प्रश्नः ।

$$\text{नदीविस्तृतिः} = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ + का)}} = ३२'१७७६८ \text{ हस्ताः ।}$$

(६) काश्यां गङ्गापात्रे वर्त्तमानायाः कस्याश्चिन्महातरण्याः
संमुखतटदेशवर्त्तिनि चत्वारिंशत् (अ) हस्तौच्च्ये गृहे स्थितेन मनु-
जेन तद्गृहोर्ध्वतलदेशाभ्यां प्रत्येकं समसूत्रादधरांशा विद्धाः क्रमेण
४०° । १५' (आ), २५° । ३०' (का) एतन्मिता लब्धाः । तथा च
तद्गृहतलं गङ्गापात्रजलपृष्ठसमदेशात् कियत्यामुच्छ्रित्यां वर्त्तते तदु-
च्छ्रितिदेशमूलाच्च सा महानौः कियति दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{उच्चिह्रतिः} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}} = १५^{\circ} ६२२५६ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.कोज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}} = १०८^{\circ} २२८९ \text{ हस्ताः ।}$$

(७) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे ५० (अ) हस्तौच्च्यं देवगृहं वर्तते तस्याग्रमूलयोस्तत्पर्वतोपत्यकायां स्थितेन मनुजेन विद्वयोर्लब्धे क्रमेणोन्नतांशमाने ५१° । ४०' (आ) । ५०° । १५' (का) तथा च तत्पर्वतौच्च्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{औच्च्यम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}} = ९६४^{\circ} ४१२४ \text{ हस्ताः ।}$$

(८) कस्यचिन्महासरसो दक्षिणोत्तरभागयोरीश्वरप्रासादे वर्तते तयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्सरसः पूर्वभागे तथा वंशो निखनितो यथा स दक्षिणप्रासादात् २०० (अ) हस्तान्तरे स्यादुदकप्रासादाच्च ८० (क) हस्तान्तरे भवेत् । ततो दक्षिणप्रासादाद्वंशोदकप्रासादयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः २१° । १७' (का) अत्र पृच्छा तयोः प्रासादयोरन्तरं कियदिति ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= \text{अ.कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^2 - \text{अ.कोज्या}^2 \text{क}} \\ &= २१९^{\circ} ९७२ \text{ वा } १५२^{\circ} ७५ \text{ हस्ताः ।} \end{aligned}$$

(९) समुद्रान्तः प्रविष्टयोर्भूदेशयोरप्रयोर्महान्तौ शाल्मलीवृक्षावासाते । तयोरन्तरप्रदेशावगमाय भूमिस्थानात् कस्माच्चित् स्थानात् प्रतिबृक्षपर्यन्तं गणितौ प्रदेशौ क्रमेण १५० (अ), २०० (क) हस्तात्मकौ स्याताम् । एवं तस्मादेव स्थानात् तयोर्वृक्षयोरन्तरर्गतकोणे विद्धे लब्धाः किलांशाः ५०° । २७' (गा) तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरप्रदेशः कियानिति प्रश्नः ।

$$\text{अन्तरप्रदेशः} = \sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अक.कोज्यागा}} = १५५^{\circ} ८' ७ \text{हस्ताः।}$$

(१०) पर्वतशिखरे प्रस्तरमयस्तम्भो वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तत्पर्वतनिकटभूमौ स्थित्वा स्तम्भाग्रोन्नतिवेधे लब्धा अंशाः ३१° । २०' (आ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे सरलभूमौ १५० (अ) हस्तमितदेशं गत्वा स्तम्भाग्रमूलोन्नत्योर्वेधे कृते लब्धाः क्रमेणांशाः ४५° । ४२' (का) । ३५° । ३३' (गा) तथा च स्तम्भौच्छ्यं कियत् पर्वतौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{स्तम्भौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्या(का - गा)}}{\text{कोज्यागा.ज्या(का - आ)}} = ६८^{\circ} ०९' १ \text{हस्ताः}$$

$$\text{पर्वतौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ.कोज्याका.ज्यागा}}{\text{कोज्यागा.ज्या(का - आ)}} = १५६^{\circ} ८' ९८४ \text{हस्ताः}$$

(११) यस्याः क्रमनिम्नभूमेः समानभूमौ प्रावण्यं ३९° । १५' (आ) अंशा यस्याश्चाधरप्रान्तो दुस्तरनद्यास्तटं भवति तस्याः परतीरे एकं देवगृहं वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तदेवगृहसंमुखमेव तत्क्रमनिम्नोर्व्या उपरितनप्रान्ते गणकेन स्थित्वा देवगृहशिखरे विद्धे लब्धा अधरांशाः ११° । ३०' (का) एवं स देवालयसंमुखदिश्येव तां क्रमनिम्नभूमिं २०० (अ) हस्तमितामवरुह्य तद्भूमेरधरप्रान्तं प्राप्य पुनस्तदेवगृहाग्रे विद्धे लब्धा उन्नतांशाः २९° । २०' (गा) तथा सति नद्या विस्तृतिः कियती देवगृहस्यौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{नद्या विस्तृतिः} = \frac{\text{अ.ज्या(आ - का).कोज्यागा}}{\text{ज्या(का + गा)}} = १२४^{\circ} १६' ।$$

$$\text{देवगृहौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्या(आ - का).ज्यागा}}{\text{ज्या(आ + गा)}} = ६९^{\circ} ७७' ।$$

(१२) भूमौ निखनितस्य द्वात्रिंशद्वस्त-(अ) परिमाणौच्छयस्य सरलवंशस्य मूलमभितः सर्वासु दिक्षु प्रवण आस्ते । तस्य समानभूमौ प्रावण्यं किल विंशतिरंशाः (आ°) । अथ तस्मिन् वंशे वातवेगेनैकदेशे भग्ने तस्याग्रं वंशमूलात् षोडश-(क) हस्तान्तरे लग्नम्, तथा सति वंशो मूलात् कियत्सु हस्तेषु भग्न इति प्रश्नः ।

$$\frac{अ^२ - क^२}{२(अ + क).ज्याआ} = १०.२४७६ \text{ हस्तेषु भग्न इत्युत्तरम् ।}$$

(१३) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे १२० (अ) हस्तप्रमाणः प्रस्तरस्तम्भो वर्त्तते । तत्पर्वतोपत्यकास्थेन केनचित् पुरुषेण स्तम्भमूला-प्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ९° । ४०' (आ) ततः स्तम्भ-दिश्येवाग्रे २०० (क) हस्तमितसमानदेशं गत्वा पुनः स्तम्भमूलाग्र-योरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धास्तावन्त एवांशाः । तथा च पर्वतौच्छयं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{पर्वतौच्छयम्} &= \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\left(\frac{अ}{ज्याआ} \right)^२ - क^२} - अ \right\} \\ &= २८३.०४३४६५५ \text{ हस्ताः ।} \end{aligned}$$

(१४) हस्तशतो-(अ) च्छयस्य राजसदनस्योपरिभागे स्थितो गणकः समभुवि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोर्वृक्षयोरन्तरं जिज्ञासुस्तन्मू-लयोरधरांशमाने २° । ५६' (आ), ३° । ११' (का) एतावती अवगत्य तयोरेवान्तर्गतकोणं ९° । ४१' (गा) अंशमितं दृष्टवान् । तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= अ \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{आ} + \text{कोछे}^२ \text{का} - २ \text{कोछे} \text{आ} . \text{कोछे} \text{का} . \text{कोज्यागा}} \\ &= ३५४.३४९ । \end{aligned}$$

(१५) एका पूर्वापराऽन्या याम्योत्तरा चेति द्वे भित्ती द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रूते स्तः । तत्र यदा पूर्वापराया भित्तेरुत्तरपार्श्वे छाया हस्तचतुष्क- (क) विस्तृता याम्योत्तरायाश्च पश्चिमपार्श्वे छाया हस्तत्रय- (ग) विस्तृता स्यात् तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\text{उन्नतांशः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ६७^{\circ} \mid २२' \mid ४८''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ५३^{\circ} \mid ७' \mid ४८''$$

(१६) एका पूर्वापरा द्वादश- (अ) हस्तोच्छ्रूया भित्तिरस्ति । तस्याः पश्चिमप्रान्ते लग्ना पूर्वदिक्चिह्नात् ६७° । ३०' (आ) अंशान्तरे उत्तरभागे गताऽन्या भित्तिरस्ति साऽपि द्वादशहस्तोच्छ्रूया । यदा तयोर्भित्तोश्छाये तद्वहिर्भाग एव तथा संजाते यथा पूर्वापरायाश्छाया हस्तत्रय- (क) विस्तृता स्यादन्यायाश्च हस्तचतुष्क- (ग) विस्तृता भवेत् । तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{उन्नतांशः} &= \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग.कोज्याआ}}} \\ &= ६२^{\circ} \mid ११' \mid ३९'' \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकपाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{का.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग.कोज्याआ}}} = २८^{\circ} \mid १७' \mid ५१''$$

(१७) कश्चन गणकः कोणमापकयन्त्रविरहितोऽपि केवल्यष्ट्यैक दुस्तरनद्याः पात्रप्रमाणं जिज्ञासुरवाक्तीरे (कग) सरलप्रदेशं १७५ पञ्चसप्तत्युत्तरशतहस्तमितं गणयित्वा परतीरस्य (अ) चिह्नं (क)-

स्थानाद्यस्यां दिशि वर्त्तते तद्विरुद्धदिशि (कघ) प्रदेशं षष्टिहस्तमितं विगणय्य (गघ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१४ ततः (ग) स्थानाद्यस्यां दिशि (अ) चिह्नं वर्त्तते तद्विपरीतदिशि (गच) प्रदेशं ९० हस्तमितं विगणय्य (कच) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१५ तथा च तन्नद्याः पात्रप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

पात्रप्रमाणम् = २००°८६२८ हस्ताः ।

(१८) यस्याः समानभूमौ प्रावण्यं विंशतिः २०° (आ) अंशा-स्तादृश्याः क्रमनिम्नभूमेरुपरितनभागेऽस्ति शत-(अ) हस्तोच्छ्रयः कश्चन तरुः । तस्य संमुखदेश एव क्रमनिम्नोर्व्या अधस्तनभागे वृक्षा-द्धस्तशतद्वया-(क)न्तरेऽस्त्येकोदकपूर्णा वापी । तथा च तद्वृक्षाप्रभा-गस्थयोर्वानरयोरेकस्तत उत्तीर्य वापीमगादपरश्च ततः किञ्चिदुड्डीय कर्णमार्गेण तामगात् । तथा च तयोर्गत्योः समत्व उड्डीनमानं किय-दिति प्रश्नः ।

$$\text{उड्डीनमानम्} = \frac{\text{अक}(1 - \text{ज्याआ})}{2\text{अ} - \text{क}(1 + \text{ज्याआ})} = २८°०९४५४५ ।$$

(१९) सरलवंशस्याग्रे (अ) हस्तदैर्घ्यस्य समानप्रदेशस्य प्रान्तयोः प्रत्येकं स्थित्वा विद्धे लब्धास्तुल्या एव (आ) संख्याका उन्नतांशाः । तस्य च मध्यभागे स्थित्वा वंशाग्रे विद्धे लब्धा (का) उन्नतांशाः । तथा च तस्य वंशस्योच्छ्रतिः कियती प्रदेशमध्यस्थानाद्दूरत्वं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{उच्छ्रतिः} = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का}) . \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}} ।$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ.कोज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}(\text{का} + \text{आ}) . \text{ज्या}(\text{का} - \text{आ})}} ।$$

(२०) अ, क, ग संज्ञकेषु त्रिषु स्थानेषु (अ) स्थानात् (क) स्थानं प्राच्यां दिशि वर्त्तते (ग) स्थानं च प्राक्चिह्नतो दक्षिणभागे (अ) अंशान्तरे वर्त्तते । अथ (कग) स्थानयोरन्तरप्रदेशः (अ) हस्तमितोऽस्ति किन्तु तस्य दुर्गमत्वात् कस्मिंश्चिन्मनुजे (क) स्थानात् (अ) स्थानं गत्वा ततः (ग) स्थानं याते तेन (क) हस्तमितः प्रदेशोऽतिक्रान्तः । तथा च (क) स्थानात् (अ) स्थानं कियद्दूरे (अ) स्थानाच्च (ग) स्थानं कियद्दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$(क) \text{ स्थानात् } (अ) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{३} क \pm \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{३} उआ.क^२}}{२कोज्या \frac{१}{३} आ}$$

$$(अ) \text{ स्थानाच्च } (ग) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{३} क \mp \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{३} उआ.क^२}}{२कोज्या \frac{१}{३} आ}$$

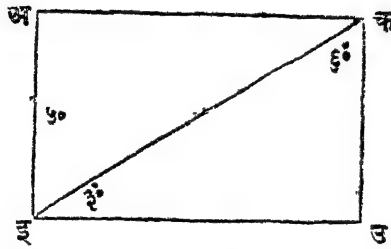
इति त्रिकोणमितितन्त्रे चतुर्थोऽध्यायः ।



अथ

त्रिकोणमिती ग्रन्थकृदुक्तविंशतिप्रश्नानां सुवासनागणिताभ्यां सहोत्तराणि ।

(१) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अइउक आयतक्षेत्रं यस्यैको भुजः अइ=अ=५० इस्ताः ।

अत्र अइ-भुजस्य इ-प्रान्ते स्थित्वा उक-भुजस्य क-प्रान्तवेधेन लब्धाः

कोणांशाः=३०°=आ । एवमिह इउक-जात्यत्रिभुजे

$$\frac{\text{ज्या } 60^\circ}{\text{ज्या } 30^\circ} = \frac{\text{इउ}}{\text{अइ}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{ज्या } 60^\circ}{\text{ज्या } 30^\circ}$$

$$= \frac{\text{अइ}}{\frac{\text{ज्या } 30^\circ}{\text{ज्या } 60^\circ}} = \frac{\text{अइ}}{\text{स्प } 30^\circ} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \quad \text{। ज्या } 30^\circ = \frac{1}{2},$$

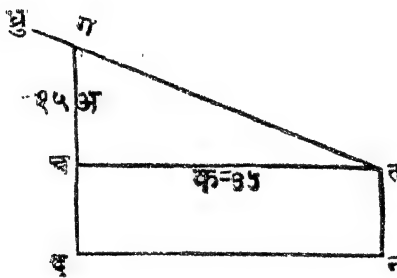
$$\therefore \text{ज्या } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \text{स्पआ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{इवभुजः} = \frac{\text{अ}}{१} = \text{अ} \times \sqrt{३} = ५० \sqrt{३}$$

$$= \sqrt{२५०० \times ३} = \sqrt{७५००} \text{ अथ ८६.६०२५४}$$

मूलानयनरीत्या मानम् = ८६.६०२५४ ।

(२) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते चतुर्दश-समभूमेरुपरि पूर्वापरायता १५हस्तोच्छ्रिता भि-
तिरस्ति । भित्तिमूलात् च-स्थानाद् दक्षिणतः त-स्थाने उत्थाय रात्रौ
यद्युत्तरं विलोक्यते तदा ध्रुवतारा तद्भित्तेरप्रप्रदेशे ग-बिन्दावेव
दृश्यते । अत्र ध्रुवोन्नतिरपेक्ष्या । उक्ते गचतत्रिभुजे अ, क, ग क्रमेण
भुजाः, कोणाश्च आ, का, गा । ज्ञातत्वात् गा = ९०° ।

$$\text{अत्र } \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

अतोऽस्य ९०तमपृष्ठस्थपञ्चमोदाहरणानुसारेण प्रघातमापकरूपम् ।

$$\text{प्रघादस्पआ} = १० + \text{प्रघादअ} - \text{प्रघादक}$$

$$= १० + १७६०९१३ - ५४४०६१८ = ९६३२०२९५ ।$$

$$\therefore \frac{अ \times ज्याआ}{ज्या(आ+का)} = जत$$

$$\therefore जद = \frac{जत \times ज्यागा}{१} = \frac{अ \times ज्याआ \times ज्यागा}{ज्या(आ+का) \times १}$$

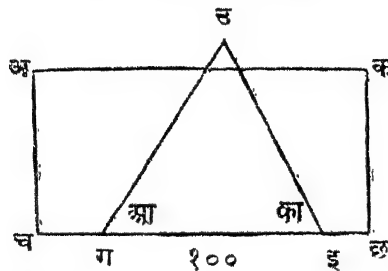
$$\therefore प्रघाटजद = प्रघाटअ + प्रघाटज्याआ + प्रघाटज्यागा \\ - प्रघाटज्या(आ+का) - प्रघाट१$$

$$= २०१०३०० + ९९२६८३१४ + ९८८५२१५ \\ - ९९९९७४८ - १०$$

$$= \left\{ \frac{२०११३३८२९ \\ - ९९९९९७४८}{११३४०८१} \right\} = प्रघाटजद = प्रघाट१२९८४$$

$$\therefore जद = १२९८४ ।$$

(४) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अकलच-प्रदेशे किमपि गृहं वर्तते यत्र वेध्यस्थानम् उ ।
तद्गृहं च यस्या नद्यास्तटेऽस्ति ततोऽन्यस्मिन् पारे अ-स्थाने विद्यमानेन
केन चिद्द्रष्टा तत् स्थानं विद्धा तत एक शतहस्तमितं प्रदेशं तिर्यग्-
गत्वा पुनस्तदेव स्थानं विद्धम् । तत्र कोणौ $\angle आ = ४०^\circ$ । $२५'$
 $\angle का = ३७^\circ$ । $४८'$ अतः स्थानद्वयाद्गृहान्तरे अपेक्ष्ये ।

$$१०० = अ । \frac{अ}{ज्या\{१८०-(आ+का)\}} = \frac{अ}{ज्या(आ+का)} = \frac{इउ}{ज्याआ}$$

$$= \frac{\text{गड}}{\text{ज्याका}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या(आ+का)}}$$

$$\text{एवम् गड} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ+का)}}$$

द्वयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे ।

$$\text{प्रघादइउ} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याआ} - \text{प्रघादज्या(आ+का)}$$

$$= 0000000 + 9.2112032 - 9.9900402$$

$$= -0.7788370 = 0.2211629 = \text{प्रघाद}(66.23)$$

$$\therefore \text{इउ} = 66.23 ।$$

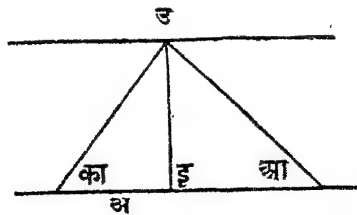
$$\text{एवम् प्रघादगड} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याका} - \text{प्रघादज्या(आ+का)}$$

$$= 0000000 + 9.7039886 - 9.9900402$$

$$= -0.2860516 = 0.7139484 = \text{प्रघाद}(62.61)$$

एवं यत्र ऋणमानं संपद्यते तत्र तद्वरूपाद्विशोध्य धनमानम-
वगम्यम् ।

(५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते नद्या अपरतटस्थः कश्चिद् पदार्थः उ । आ-प्रदेशस्थेन ते
विध्यता द्रष्टा आ-कोणो ज्ञातस्तथा अ-षष्टिमितं हस्तान्तरं तिर्यग्गत्वा-
ततस्तमेव विध्यता तेन का-कोणोऽपि ज्ञातः । एवं त्रिभुजस्य कोणाभ्यां
तदन्तर्वर्तिना भुजेन च नदीविस्तारोऽवगम्यः ।

दर्शितक्षेत्रे $१८०^{\circ} - (\text{आ} + \text{का}) = \text{उकोणः}$ ।

$$\therefore \text{उका} = \frac{\text{अ} \times \text{उयाआ}}{\text{उया}(\text{आ} + \text{का})}$$

$$\therefore \text{नदीविस्तारः} = \text{उइ} = \frac{\text{अ} \times \text{उयाआ} \times \text{उयाका}}{\text{उया}(\text{आ} + \text{का}) \times १}$$

अस्य प्रघातमाप्सरूपम् ।

$$\begin{aligned} \text{प्रघादुइ} &= \text{प्रघादुअ} + \text{प्रघादुउयाआ} + \text{प्रघादुउयाका} \\ &\quad - \text{प्रघादुउया}(\text{आ} + \text{का}) - १० \end{aligned}$$

$$= ७७८१५१३ + ९८२७८८८३ + ९८९९५०६$$

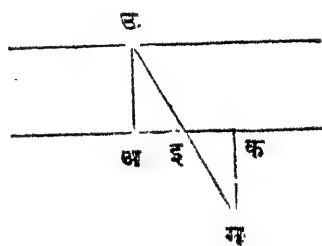
$$- ९९९८४३१५ - १०$$

$$= २०५०५९८६२ - १९९९८४३१५$$

$$= ५०७५९४७ = \text{प्रघादु३२.१८}$$

$$\therefore \text{उइ} = \text{नदीविस्तारः} = ३२.१८ \dots ।$$

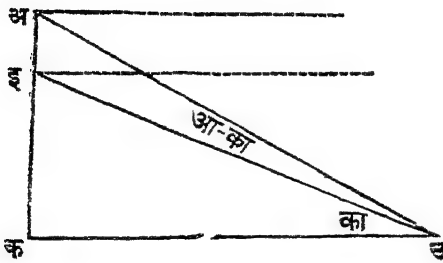
अथ केवलरेखागणितेनास्य प्रकारान्तरोपपत्तिः ।



अन्यथाऽपि नदीविस्तारोऽवगन्तुं शक्यते कल्प्यते-नद्या अपरपार्श्वे कश्चिद् उ-बिन्दुः । अ-बिन्दुस्येन द्रष्टा तथाऽवलोक्यते यथा नदीतटरूपायाम् अक-रेखायाम् उअ-रेखा लम्बरूपा भवेत् । तत इ-बिन्दुर्यावति दूरे यदिशि तवाति दूरे तदिदमेव क-बिन्दौ गत्वा तथा कग-रूपायां

लम्बरेखायां स द्रष्टा चलितो यथा इ-बिन्दुं पश्यन् उ-बिन्दुमपि पश्येत्
तदा (रे. १ अ. २६ प्र) अउ = कग, अयमेव नदीविस्तारः सुसिद्धः ।

(६) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अइ = गृहोच्च्यम् = अ । अ-बिन्दुर्गृहोर्ध्वप्रदेशः । इ-बिन्दुर्गृहतल-
प्रदेशः । उ-बिन्दुस्था महानौः । कउ = उच्छ्रितिप्रदेशमूलात्रौकाधिष्ठि-
तप्रदेशदूरता ।

अस्मिन् प्रश्ने “गृहतलोर्ध्वदेशाभ्याम्”—इत्यत्र “गृहोर्ध्वतलदेशा-
भ्याम्”—इत्यनेन भवितव्यम् ।

$$\text{अइ-त्रिभुजे इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या(आ-का)}} ,$$

$$\text{कइ-त्रिभुजे कइ} = \frac{\text{इउ} \times \text{ज्याका}}{१} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{उच्छ्रितिः} ।$$

$$\text{अत्रैव कउ} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{कोज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{दूरता} ।$$

द्वयोः प्रघातमापकरूपे ।

प्रघात्कइ

$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याआ} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्या(आ - का)} - १०$$

$$= \text{प्रघाट} ४० + \text{प्रघाटकोज्या}(४०^{\circ} \mid १५') + \text{प्रघाटज्या}(२५^{\circ} \mid ३०')$$

$$\text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १० \mid$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९६३३९८४४ \\ - १० \\ - ९४०५८६१७ \end{array} \right\} = - \frac{१९४०५८६१७}{७१२८३९५}$$

$$= \text{प्रघाट} ५१^{\circ} ६२' ४८''$$

$$\therefore \text{कइ} = \text{उच्छ्रिति} = ५१^{\circ} ६२' ४८'' \text{ प्रभोत्तरे उच्छ्रितिः}$$

$$\text{कइ} = १५^{\circ} ६२' २५'' \text{ प्रायः प्रामादिकीति विज्ञैर्ज्ञेयम् ।}$$

अथैवं प्रघाटकउ

$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याआ} + \text{प्रघाटकोज्याका}$$

$$- \text{प्रघाटज्या(आ - का)} - १०$$

$$= \text{प्रघाट}(४०) + \text{प्रघाटकोज्या } ४९^{\circ} \mid ४५' + \text{प्रघाटज्या}(६४^{\circ} \mid ३०')$$

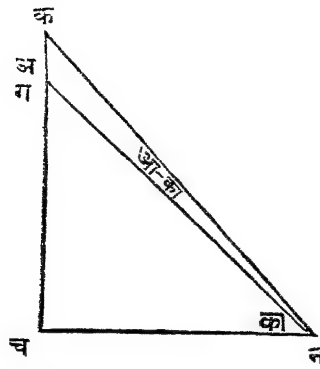
$$- \text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १० \mid$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९९५५४८८२ \\ - ९४०५८६१७ \\ - १० \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + २०४४०२०५० \\ - १९४०५८६१७ \\ १०३४३४३३ \end{array} \right\}$$

$$= \text{प्रघाट} १०८^{\circ} २२' ९७''$$

$$\therefore \text{दूरता} = १०८^{\circ} २२' ९७'' \mid$$

(७) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र (न) पर्वतोपत्यकाभूमौ वेध्यस्थानम् । चग-पर्वतस्य ग-शिखरे कग-देवगृहम् । न-स्थानतो देवगृहाग्रवेधेन उन्नतांशाः \angle कनच = आ, एवं देवगृहमूलवेधेन उन्नतांशाः \angle गनच = का, कग = अ ।

आ = $५१^{\circ} ४०'$ । का = $५०^{\circ} १५'$ । अ = ५० हस्ताः ।

अत्र कनच-त्रिभुजस्य ज्ञात्वात्

$$\angle \text{चकन} = ९०^{\circ} - \angle \text{कनच} \therefore \frac{\text{कग}}{\text{ज्या } \angle \text{कनग}} = \frac{\text{गन}}{\text{ज्या } \angle \text{गकन}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} = \frac{\text{गन}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\therefore \text{गन} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} ।$$

$$\therefore \frac{\text{गन}}{१} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्या } \angle \text{गनच}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्याका}}$$

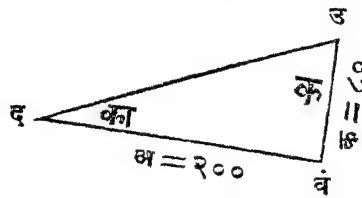
$$\therefore \text{चग} = \text{पर्वतोच्च्यम्} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १}$$

$$\therefore \text{प्रघादचग} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादकोज्याआ} + \text{प्रघादज्याका}$$

$$- \text{प्रघादज्या}(\text{आ} - \text{का}) - \text{प्रघादज्या}(९०) .$$

$$\left\{ \begin{array}{r}
 + ६९८९७०० \\
 + ९७९२५५६६ \\
 + ९८८५८३७० \\
 + २०३७७३६३६ \\
 - ८३९३१००८ \\
 - १० \\
 \hline
 १९८४२६२८
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \therefore \text{प्रधाद्वचग} = १९८४२६२८ \\
 \therefore \text{चग} = ९६४४१२६ \text{ एतदेव} \\
 \text{पर्वतौच्छयम् ।}
 \end{array}$$

(८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अस्मिन् प्रश्ने प्रासादो वर्त्तते इत्यत्र “प्रासादे वर्त्तते” इत्यशुद्धिः ।
 द-सरसो दक्षिणभागः । उ-उत्तरभागः । व-पूर्वभागे द-स्थानात् अ-
 हस्तान्तरे तथा उ-स्थानात् क-हस्तान्तरे वंशमूलम् । अत्र वंदउ-कोणो
 वेधेन ज्ञातः = का, दव = अ, उव = क ।

$$\therefore (३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्याका} = \frac{अ^2 + दउ^2 - क^2}{२अ.दउ}$$

$$\therefore क^2 - अ^2 = दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका$$

$$\therefore क^2 - अ^2 + अ^2.कोज्या^2का$$

$$= दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका + अ^2.कोज्या^2का$$

$$क^2 - अ^2 (१ - कोज्या^2का)$$

$$\therefore \underline{+मू} = दउ - अ.कोज्याका \therefore अ.कोज्याका + \underline{मू} = दउ$$

$$\therefore दउ = अ.कोज्याका + \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

$$\text{वा } दउ = अ.कोज्याका - \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

अत्र अ.कोज्याका = ग कल्प्यते, तदा प्रधाद्वग

$$= \text{प्रघाट् अ} + \text{प्रघाट् कोज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २ \cdot ३०१०३०० \\ ९ \cdot ९६९३२१२ \\ १२ \cdot २७०३५१२ \end{array} \right\}$$

∴ ग = १८६'३६१ । अथ क^२ - अ^२ ज्या^२का एतन्मूलार्थः

अ^२ ज्या^२का = च^२ कल्प्यते तदा प्रघाट् च

$$= \text{प्रघाट् अ} + \text{प्रघाट् ज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २ \cdot ३०१०३०० \\ ९ \cdot ५५९८८२९ \\ ११ \cdot ८६०९१२९ \end{array} \right\}$$

∴ प्रघाट् च^२ = २(११'८६०९१२९) = २३'७२१८२५८

∴ च^२ = ५२७०'१८

∴ दड = अ.कोज्याका + $\sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2 \text{ज्या}^2 \text{का}}$

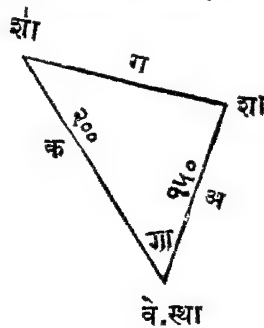
$$= ग + \sqrt{\text{क}^2 - \text{च}^2} = ग + \sqrt{६४०० - ५२७०'१८}$$

$$= ग + \sqrt{११२९'८२} = ग + ३३'६११$$

$$= १८६'३६१ + ३३'६११ = \left\{ \begin{array}{l} २१९'९७२ \\ \text{वा } १५२'७५ \end{array} \right\}$$

∴ दड = २१९'९७२ वा १५२'७५

(९) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र शा, शा शाल्मलीवृक्षौ, वे.स्था वेध्यस्थानम् । ततः अ, क भुजौ तदन्तर्गतकोणश्चैते ज्ञाताः । एभ्यो ग-भुजप्रमाणमन्वेष्यम् ।

$$(३८) \text{ प्रकमतः कोज्यागा} = \frac{अ^२ + क^२ - ग^२}{२अ.क}$$

$$\therefore २अ.क.कोज्यागा = अ^२ + क^२ - ग^२$$

$$\therefore ग^२ = अ^२ + क^२ - २अ.क.कोज्यागा$$

$$\therefore ग = \sqrt{अ^२ + क^२ - २अ.क.कोज्यागा}$$

$$\text{अत्र } २अ.क.कोज्यागा = च$$

$$\therefore \text{प्रघाटच} = \text{प्रघाट२} + \text{प्रघाट४} + \text{प्रघाट६} + \text{प्रघाट८कोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} ३०१०३०० \\ २१७६०९१३ \\ २३०१०३०० \\ ९८०३९६९९ \end{array} \right\} \therefore \text{प्रघाट च} = १४५८२१२१२$$

$$\underline{१४५८२१२१२}$$

$$\therefore च = ३८२०५११४$$

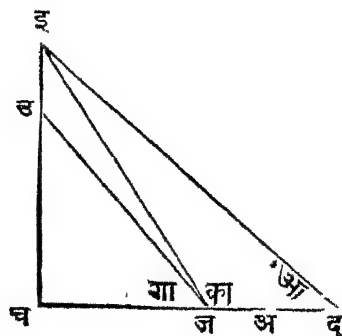
$$\therefore ग = \sqrt{अ^२ + क^२ - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२२५०० + ४०००० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{६२५०० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२४२९४८८६} = १५५८७$$

(१०) प्रश्नस्योत्तरम् ।



चउ = पर्वतौच्छयम्, तत्र उइ-स्तम्भः, द-प्रथमवेध्यस्थानम् ।
ज-पर्वताधःप्रदेशस्थं द्वितीयवेध्यस्थानम् । इदज-कोणः = आ = ३१° । २०',
इजच-कोणः = का = ४५° । ४२', उजच-कोणः = गा = ३५° । ३३'
जद = अ = १५०, अत्र पर्वतौच्छयं स्तम्भोच्छ्रितिश्चैते अपेक्ष्ये ।

दजइ-त्रिभुजे जइद-कोणः = का - आ,

$$\therefore \text{इज} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या}(का - आ)}$$

\therefore \text{इउज-त्रिभुजे इजउ-कोणः} = का - गा

$$\therefore \text{इउ} = \frac{\text{इज} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{ज्या}(का - आ) \text{ कोज्यागा}} \quad ।$$

$$\text{इजउ-त्रिभुज एव जउ} = \frac{\text{इज} \times \text{कोज्याका}}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(का - आ) \text{ कोज्यागा}} ,$$

$$\therefore \text{उच} = \frac{\text{जउ} \times \text{ज्यागा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{कोज्याका} \times \text{ज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(का - आ) \text{ कोज्यागा}}$$

अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\begin{aligned} \text{प्रघादइउ} &= \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याआ} + \text{प्रघादज्या}(का - गा) \\ &\quad - \text{प्रघादज्या}(का - आ) - \text{प्रघादकोज्यागा} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + १७६०९१३ \\ + ९७१६०१६८ \\ + ९२४६०६९५ \\ + १९१३८१७७६ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} + ९३९४६७२९ \\ + ९९१०४१५५ \\ + १९३०५०८८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + १९.१३८१७७६ \\ - १९.३०५०८८४ \\ - १६६९१०८ \\ + ८३३०८९२ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटुच} = ८३३०८९२ \therefore \text{इउ} = ६८.०३६$$

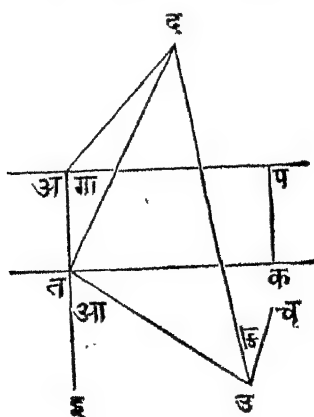
$$\begin{aligned} \text{प्रघाटुच} &= \text{प्रघाटुअ} + \text{प्रघाटुआआ} + \text{प्रघाटुज्याका} + \\ &\text{प्रघाटुज्यागा} - १० - \text{प्रघाटुज्या(का - आ)} - \text{प्रघाटुकोज्यागा} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + १७६०९२३ \\ + ९.७१६०१६८ \\ + ९.८४४११३७ \\ + ९.७६४४८४९ \\ + २९.५००७०६७ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{r} + १०. \\ + ९.३९४६५२९ \\ + ९.९१०४१५५ \\ + २९.३०५०६८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + २९.५००७०६७ \\ - २९.३०५०६८४ \\ - १९५६३८३ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटुच} = १९५६३८३ \therefore \text{उच} = १५६.८९८५$$

(११) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते अपकृत = नद्याकृतिभागः । यत्र अ-अपरभागः, अद = देवगृहौच्यम् । तउ = (वेध्यपारे) प्रवणभूप्रदेशः । तत्र उ = उच्चभूप्रदेशचिह्नम्, त = तलप्रदेशचिह्नम् । अइ-रेखा त-विन्दुतः क्षितिजसमानान्तरधरातलगता अप-रेखापरि तथा तक-रेखोपरि लम्बरूपा, त-स्थानात् प्रावण्यकोणः = आ, त-स्थानाद् देवमन्दिराग्रवेधेनोन्नतांशाः = का, उ-स्थानाद् देवमन्दिग्रवेधेनोन्नतांशाः = गा, अतः अत-नदी-विस्तृतेस्तथा अद-मन्दिरौच्यमानस्य च ज्ञानमपेक्ष्यम् ।

अत्रेदमवधेयं यत् उ-स्थानात् क्षितिजसमानान्तरधरातलं तद्वर्धितदेवमन्दिराग्ररेखां स्पृशेत् त-स्थानतस्तथा उ-स्थानतश्च क्षितिज-समानान्तरधरातलान्तरादल्पं मन्दिरौच्यमिति ।

अत्रोपपत्तिः । तइ, उच्च-रेखे समानान्तरे तउ-रेखया छिन्ने, $\therefore \angle$ इतउ = आ = \angle तउच $\therefore \angle$ तउच - \angle दउच = आ - का = \angle तउद ।

अथ \angle दतउ = १८०° - (आ + गा)

$$\therefore \angle$$
 तउच + \angle दतउ = १८०° - (आ + गा) + (आ - का)

$$= १८०^{\circ} - (का + गा) \therefore \angle$$
 तदउ

$$= १८०^{\circ} - \{१८०^{\circ} - (का + गा)\} = का + गा$$

$$\therefore \text{तद} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}{\text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\therefore \text{अत} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \text{ कोज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

$$\text{अद} = \frac{\text{तउ} \times \text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \text{ ज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(\text{का} + \text{गा})}$$

अत्र तउ = अ

\therefore अनयोः प्रघातमापकरूपे—

$$\text{प्रघादअत} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्या}(\text{आ} - \text{का})$$

$$+ \text{प्रघादकोज्यागा} - १० - \text{प्रघादज्या}(\text{का} + \text{गा})$$

$$\begin{array}{r}
 + \quad २०१०३०० \\
 + \quad ९६६८०२६५ \\
 + \quad ९९४०४०९१ \\
 + \quad १९९०९४६५६ \\
 - \quad १० \\
 - \quad ९८१५४८५४ \\
 \hline
 \end{array}$$

$$०९३९८०२ \therefore \text{प्रघाटभत} = ०९३९८०२$$

$$\therefore \text{अत} = १२४१६ \text{ इयं नदीविस्तृतिः ।}$$

$$\text{प्रघाटअद} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्या}(\text{आ} - \text{का})$$

$$+ \text{प्रघाटज्यागा} - १० - \text{प्रघाटज्या}(\text{का} + \text{गा})$$

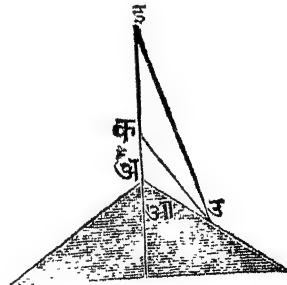
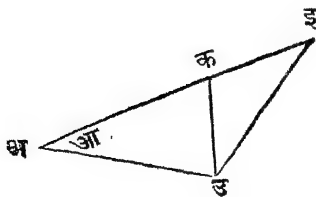
$$\begin{array}{r}
 + \quad २०१०३०० \\
 + \quad ९६६८०२६५ \\
 + \quad ९६९००९८३ \\
 + \quad १९६५९१९४८ \\
 - \quad १० \\
 - \quad ९८१५४८५४ \\
 \hline
 \end{array}$$

$$८४३६६९४$$

$$\therefore \text{प्रघाटअद} = ८४३६६९४$$

$$\therefore \text{अद} = ६९७७ \text{ इयं देवगृहोच्छ्रितिः ।}$$

(१२) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अद-प्रवणभूमौ निखनितः अइ-वंशोऽस्ति । अयं भग्नः सन् अ-
मूलात् षोडशहस्तान्तरे उ-स्थाने लग्नस्तदा अक-प्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

अत्र उ-स्थानस्यः कोणः प्राच्यम् = आ, ∴ < कअउ = आको,
अउक-त्रिभुजे (३८) प्रक्रमतः—

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अउ}^2 + \text{अक}^2 - \text{कउ}^2}{२\text{अउ.अक}}, \text{द्वितीयपदे कोटिज्याया कृणत्वान्}$$

$$\text{कउ}^2 = \text{अउ}^2 + \text{अक}^2 + २\text{अउ.अक.ज्याआ},$$

$$\text{कउ} = \text{अइ} - \text{अक} \therefore \text{कउ}^2 = \text{अइ}^2 - २\text{अइ.अक} + \text{अक}^2,$$

$$\therefore \text{अइ}^2 - २\text{अइ.अक} + \text{अक}^2 = \text{अउ}^2 + \text{अक}^2 + २\text{अउ.अक.ज्याआ}$$

$$\therefore \text{अइ}^2 - \text{अउ}^2 = २\text{अइ.अक} + २\text{अउ.अक.ज्याआ}$$

$$= \text{अक } २(\text{अइ} + \text{अउ.ज्याआ})$$

$$\therefore \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{२(\text{अइ} + \text{अउ.ज्याआ})}$$

अत्र हरे २(अइ + अउ.ज्याआ) द्वितीयखण्डस्य प्रघातमापक-
रूपम् ।

$$\text{प्रघातअउ} + \text{प्रघातज्याआ}$$

$$= \left. \begin{array}{l} २०४१२०० \\ ९५३४०५१७ \end{array} \right\} = ९७३८१७१७$$

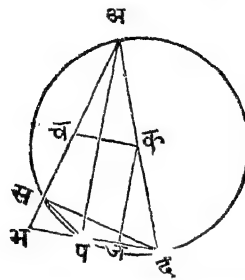
$$\therefore २(\text{अइ} + ५४९५) = २(३२ + ५४९५)$$

$$= २(३७४९५) = ७४९९०$$

$$\therefore \text{अक} = \frac{\text{अइ}^2 - \text{अउ}^2}{२(\text{अइ} + \text{अउ.ज्याआ})} = \frac{१०२४ - २५६}{७४९९०}$$

$$= १०२४ \dots\dots\dots ।$$

(१३) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कुत्रापि समानभूमौ स्थित्वा कस्य चिदुच्चभूमिष्ठस्य स्तम्भस्याग्र-
मूलगतसूत्रोत्पन्नकोणो यदि तस्यामेव समानभूमौ स्थानान्तरे स्थित-
वता विध्यता जनेन पूर्वविद्धाग्रमूलोत्पन्नकोणसमानः कोणः प्राप्तस्तदा
स्तम्भप्रमाणरूपाधारे त्रिभुजद्वयमुत्पद्यते यथाः शीर्षलग्नावाधारसं-
मुखौ कोणौ समानावतस्तत् त्रिभुजद्वयमेकवृत्तान्तर्गतम् । इयमेव संस्था-
ऽस्मिन् १३प्रश्नेऽप्यतोऽत्र प्रथमवेधस्थानम् (प), द्वितीयवेधस्थानम्
(द), स्तम्भमूलम् (स), स्तम्भाग्रम् (अ), चैतेभ्यश्चतुर्भ्यो बिन्दुभ्य-
श्चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतम् । वेधस्थानान्तरम् दप = २०० = क । अग्रमूलो-
त्पन्नकोणः $\angle सपअ = \angle सदअ = आ = ६१^{\circ} ४०'$ । स्तम्भप्रमाणम् = अस
= १२० = अ ।

$$\therefore \text{अदपस-वृत्तव्यासार्धम्} \frac{\frac{\text{अस}}{२} \times १}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{अस}}{२\text{ज्याआ}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{२\text{ज्याआ}} = \text{कद},$$

$$\therefore \text{कद}^२ - \text{जद}^२ = \text{कद}^२ - \left(\frac{\text{दप}}{२} \right)^२ = \text{कद}^२ - \left(\frac{\text{क}}{२} \right)^२$$

$$= \frac{\text{अ}^२}{४\text{ज्या}^२\text{आ}} - \frac{\text{क}^२}{४} = \frac{१}{४} \left(\frac{\text{अ}^२}{\text{ज्या}^२\text{आ}} - \text{क}^२ \right)$$

$$= \text{चम}^2 \therefore \frac{१}{२} \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}}} - \text{क}^2 = \text{चम}$$

$$\therefore \frac{१}{२} \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}}} - \text{क}^2 - \frac{\text{अ}}{२} = \text{चम} - \text{सच}$$

$$\therefore \text{भस} = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}}} - \text{क}^2 - \frac{\text{अ}}{२} \right\}$$

$$= \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} - \frac{\text{अ}}{२} \right\} \text{ इदमेव पर्वतौच्छ्रयम् }$$

अत्र कोष्ठकान्तर्गतप्रथमखण्डस्य

प्रघातमापकरूपार्थं यदि $\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 = \text{इ}^2$ कल्प्यते

तदा प्रघादइ = प्रघादअ - प्रघादज्याआ

$$+ ०७९१८१२$$

$$- ९०२५०९१८ \therefore \text{प्रघादइ} = \frac{८५४०८९४}{८५४०८९४}$$

$$\therefore \text{इ} = ७१४.६४१९ \therefore \text{इ}^2 = ५१०७१३.०२५२३५६१$$

$$\therefore \left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2 = ५१०७१३.०२५ - ४००००$$

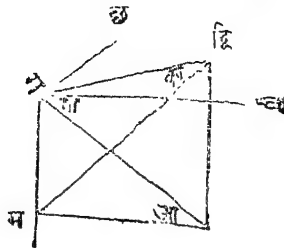
$$= ४७०७१३.०२५$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} = ६८६.०८$$

$$\therefore \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} - \frac{\text{अ}}{२} \right\} = २८३.०४$$

इदमेव पर्वतौच्छ्रयमानमिति ।

(१४) प्रश्नसोत्तरम् ।



कल्पयते

अत्र मग = राजसदनोच्छ्रितः ।

प्र = प्रथमवृक्षमूलम् ।

द्वि = द्वितीयवृक्षमूलम् ।

प्र-द्वि = वृक्षमूलान्तरम् ।

गच-गछ-रेखे अधरांशकोणज्ञानार्थं विहिते तदर्थमस्यैव ११५ त
पृष्ठस्था टिप्पण्यवलोक्या ।

$$\text{गमप्रत्रिभुजस्य जात्यत्वात् गप्र} = \frac{\text{गम} \times १}{\text{ज्याभा}}$$

$$\text{गमद्वित्रिभुजस्यापि जात्यत्वात् गद्वि} = \frac{\text{गम} \times १}{\text{ज्याका}}$$

∴ गप्रद्वि-त्रिभुजे 'प्रद्वि' वृक्षमूलान्तरमज्ञातं ततोऽस्यैव (३)

प्रक्रमतः—

$$\frac{\text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{प्रद्वि}^2}{२\text{गप्र.गद्वि}} = \text{कोज्यागा} ।$$

$$\therefore \text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{प्रद्वि}^2 = \text{कोज्यागा} \times २\text{गप्र.गद्वि} ।$$

$$\therefore \text{प्रद्वि}^2 = \text{गप्र}^2 + \text{गद्वि}^2 - \text{कोज्यागा} \times २\text{गप्र.गद्वि}$$

$$= \frac{\text{गम}^2}{\text{ज्याभा}} + \frac{\text{गम}^2}{\text{ज्याका}} - \frac{\text{कोज्यागा} \times २\text{गम}^2}{\text{ज्याभा. ज्याका}}$$

$$= गम \left(\frac{१}{ज्या^२ आ} + \frac{१}{ज्या^२ का} - \frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका} \right)$$

$$\therefore \text{प्रद्वि} = गम \sqrt{\text{कोछे}^२ आ + \text{कोछे}^२ का - २कोछेआ.कोछेका.कोज्यागा}$$

$$= अ \sqrt{\frac{१}{ज्या^२ आ} + \frac{१}{ज्या^२ का} - २कोज्यागा \times \frac{१}{ज्याआ.ज्याका}}$$

अत्र हस्तादिमानानयनार्थं 'लघुरिक्त्य'-सारिणीतः प्रघातमापक-
रूपायास्य खण्डचतुष्टयं कृतम् । अ, $\frac{१}{ज्या^२ आ}$, $\frac{१}{ज्या^२ का}$, $\frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका}$ ।

$$\frac{१}{ज्या^२ आ} = क, \frac{१}{ज्या^२ का} = ग, \frac{२कोज्यागा}{ज्याआ.ज्याका} = घ$$

$$\therefore \text{प्रघादक} = २० - \text{प्रघाद} २ \text{ज्याआ}, \text{प्रघादग} = २० - \text{प्रघाद} २ \text{ज्याका},$$

$$\text{प्रघादघ} = \text{प्रघाद} २ + \text{प्रघादकोज्यागा} + १० - \text{प्रघादज्याआ} -$$

प्रघादज्याका ।

$$\therefore \text{प्रघादक} = २० - २(८^{\circ}७०'९०४९०) = २० - १७^{\circ}४१'८०'९८०$$

$$= २^{\circ}५८'१९०'२० \therefore क = ३२४^{\circ}२८'६२ ।$$

$$\text{प्रघादग} = २० - २(८^{\circ}७४'४५३६०) = २० - १७^{\circ}४८'९०'७२०$$

$$= २^{\circ}५१'०९'२८० \therefore ग = ३८१^{\circ}८५'८२$$

$$\text{प्रघादघ} = ३०१०३०० + ९९९३७६७९ + १० - ८^{\circ}७०'९०४९०$$

$$- ८^{\circ}७४'४५३६०$$

$$= २०^{\circ}२९४'७९'७९ - १७^{\circ}४५३५'८५० = २^{\circ}८४१'२१'२९$$

$$\therefore घ = ६९३^{\circ}७६'५९$$

$$\therefore \text{प्रद्वि} = अ \sqrt{क + ग - घ}$$

$$= १०० \sqrt{३२४^{\circ}२८'६२ + ३८१^{\circ}८५'८२ - ६९३^{\circ}७६'५९}$$

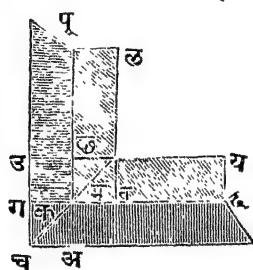
$$= १०० \sqrt{७०६^{\circ}१४'४४ - ६९३^{\circ}७६'५९}$$

$$= 100 \sqrt{12.3764} = 100 \times 3.51707$$

$$= 351.707 \dots \dots \dots 1$$

प्रश्नान्ते उत्तरम् ३५४.३४९ इदमशुद्धम् ।

(१५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र पूर्वा-परायता पूल-मितद्वादशहस्तोच्छ्रिता पूलतमू-भित्तिस्तथा द्वादशहस्तोच्छ्रितैव याम्योत्तरा लयदमू-भित्तिरन्या पश्चिमदिशि संल-ग्राऽस्ति इष्टसमये पूर्वकपाले द्वयोर्भित्तयोश्छाये समानभूमौ पतिते । ययोः पूर्वापरभित्तेश्छाया क-मितोत्तरस्यां दिशि पतिता तथा याम्यो-त्तरभित्तेश्छाया ग-मिता पश्चिमस्यां दिशि पतिता । अत्र रवेरुन्नतांशा-स्तत्र दिगंशाश्च के इति प्रश्नः । इह क-मितो भुजः, ग-मिता कोटिः, मूच-मितः कर्णः । वास्तविको भुजश्च क, ग-मिता कोटिस्ततो वास्तवि-की छाया मूच-मिता = $\sqrt{क^2 + ग^2}$ । अथ मूचअ-जात्यत्रिभुजे

$$\text{ज्या } \angle \text{चमूअ} = \text{ज्यादि} = \frac{१ \times \text{चअ}}{\text{मूच}} = \frac{१ \times \text{क}}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$\text{अत्र } \sqrt{क^2 + ग^2} = \sqrt{४^2 + ३^2} = \sqrt{२५} = ५ ।$$

$$\therefore \text{ज्यादि} = \frac{१ \times \text{क}}{५} \therefore \text{प्रघातमापकरूपे}$$

$$\text{प्रघादज्यादि} = \text{प्रघादक} + १० - \text{प्रघाद } ५$$

$$= ६०२०६०० + १० - ६९८९७०० = ९९०३०९००$$

$$\therefore \text{पूर्वकपाले उत्तरा दिगंशाः} = ज्या^{-१} \cdot \frac{क}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= ज्या^{-१} \cdot ९९०३०९०० = ५३^{\circ} ७' ४'' ।$$

अथोन्नतांशार्थमुपायः । पूर्वोक्तक्षेत्रे मूच-मितैव छाया भुजो द्वादश कोटिरनयोर्वर्गान्तरपदं कर्णः, एवं दृग्ज्या भुज उन्नतांशज्या शङ्कुः कोटिस्त्रिज्या कर्णश्चानयोः क्षेत्रयोः साजात्यं प्रसिद्धमतः

$$\frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{\text{ज्याउन्न}}{\text{ज्यादृ}} = \text{स्पउन्न} ।$$

$$\therefore \text{स्पउन्न} = \frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

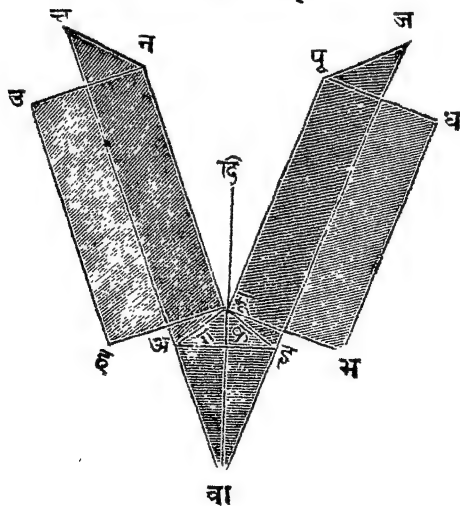
$$\therefore \text{प्रघाटस्पउन्न} = \text{प्रघाटअ} + १० - \text{प्रघाट५}$$

$$= १०७९१८१२ + १० - ६९८९७००$$

$$= १०३८०२११२ । \therefore \text{उन्नतांशाः} = \text{स्प}^{-१} \cdot \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= \text{स्प}^{-१} \cdot १०३८०२११२ = ६७^{\circ} २२' ४'' ।$$

(१६) प्रश्नस्योत्तरम् ।



$$\therefore \text{ज्यादि} = \frac{\text{ज्याआ.क}}{५८४६७...} = \frac{०९२३८७९५ \times ३}{५८४६७...}$$

$$= \frac{२७७१६३८५}{५८४६७...} = ४७४०५१७.....$$

∴ दिगंशा उत्तराः = २८° । १७ ।

अथोन्नतांशाः साध्यन्ते । वास्तविकी छाया वामू-मिता

$$= \frac{\text{क} \times १}{\text{ज्यादि}} \quad (\text{वाइमू-क्षेत्रे द्रष्टव्यम्})$$

$$= \frac{\text{क} \times १ \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}{\text{ज्याआ.क}}$$

$$= \frac{१ \times \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}{\text{ज्याआ}}$$

$$\therefore \text{स्पउन्न} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याआ}}}$$

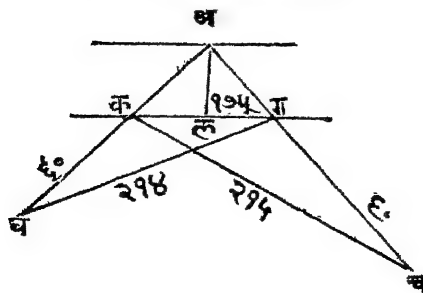
[अत्र अ = १२ हस्ताः शङ्कुर्हस्तात्मकः कल्पितः] ।

$$= \frac{१२ \times ०९२३८७९५}{५८४६७...} = \frac{११०८६५५४०}{५८४६७०००}$$

$$= \frac{११०८६५५४}{५८४६७००} = १८९६२०७१$$

∴ उन्नतांशाः पूर्वकंपालीयाः = ६२° । ११' ।

(१७) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अवाक्तीरस्थः सरलप्रदेशः कग = १७५, कघ = ६०,
गघ = २१४, गच = ९०, कच = २१५, एभ्यः अल-प्रमाणो नद्या वि-
स्तारोऽपेक्ष्यः ।

(३८ प्रक्रमतः) कगच-त्रिभुजे कोज्या \angle कगच = $\frac{\text{कच}^2 - \text{कग}^2 - \text{गच}^2}{२\text{कग.गच}}$

$$= \frac{(२१५^2) - (१७५^2 + ९०^2)}{२ \times १७५ \times ९०} = \frac{७५००}{३१५००}$$

$$= .२३८०९५२.... \therefore \angle \text{अगक} = ७६^\circ । १३' । ३३'' ।$$

एवम् कोज्या \angle गकघ = $\frac{\text{घग}^2 - \text{कघ}^2 - \text{कग}^2}{२\text{कघ.कग}}$

$$= \frac{(२१४^2) - (१७५^2 + ६०^2)}{२ \times १७५ \times ६०} = \frac{११५७१}{२१०००} = .५५१$$

$$\therefore \angle \text{अकग} = ५६^\circ । ३३' । ८'' । \therefore \angle \text{अगक} + \angle \text{अकग}$$

$$= (७६^\circ । १३' । ३३'') + (५६^\circ । ३३' । ८'') = १३२^\circ । ४६' । ४१'' ।$$

$$\therefore \angle \text{कअग} = ४७^\circ । १३' । १८'' ।$$

$$\therefore \text{अग} = \frac{१७५ \times \text{ज्या}(५६^\circ । ३३' । ८'')}{\text{ज्या}(४७^\circ । १३' । १८'')}$$

\therefore अगल-त्रिभुजोऽनुपाततः

$$\text{अल} = \frac{१७५ \times \text{ज्या}(५६^\circ । ३३' । ८'') \text{ ज्या}(७६^\circ । १३' । ३३'')}{१ \times \text{ज्या}(४७^\circ । १३' । १८'')}$$

\therefore प्रघातमापकरूपम्—

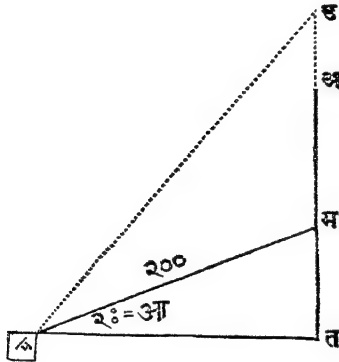
$$\text{प्रघातअल} = \text{प्रघात} १७५ + \text{प्रघातज्या}(५६^\circ । ३३') + \text{प्रघातज्या}(७६^\circ । १४') - १० - \text{प्रघातज्या}(४७^\circ । १३')$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + २२४३०३८५ \\ + ९९८७३४१३ \\ + ९९२१३५७२ \\ + २२१५१७३७० \end{array} \quad \begin{array}{l} - १० \\ - ९८६५६५३१ \\ - १९८६५६५३१ \end{array} \right\}$$

$$= (+२२.१५१७३७० - १९.८६९६५३१) = २.२८२०८३९$$

∴ अल = १९३.२३३ हस्ताः, इदमेव पात्रप्रमाणम् । प्रश्नान्ते पात्र-
प्रमाणम् = २००.८६२८ हस्ताः, इदमशुद्धम् ।

(१८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यतेऽत्र क्रमनिम्नाया मपत-भूमेरुच्चप्रदेशे ग-स्थाने स्थितस्य
हस्तशतोच्छ्रितस्य मअ-वृक्षस्य मूलं म, अग्रम् = अ । वृक्षमूलप्रदेशात्
प-स्थाने हस्तशतद्वयान्तरे काचिद्वापी । अ-अग्रस्थानस्थयांर्वा नरयोरेक-
तरो वृक्षादवतीर्य प्रवणभूम्याश्रयत एव वापीं गतः । अन्यतरश्च कि-
ञ्चिदुडुङ्ग्य कर्णगत्या तां वापीं गतः । द्वयोर्वा नरयोर्गती यदि समाने
कल्प्येते तदोडुङ्गिनमानं कियदिति प्रश्नः । अम = अ, मप = क, अउ = य
प्रश्नानुसारतः अम + मप = पउ + अउ ∴ पउ = मप + अम - अउ ।
आवण्यकोणः ∠मपत = २०° = आ ∴ ∠पमत = ९० - आ = ७०°

$$∴ ∠पमउ = १८०° - (९०° - आ) = ९०° + आ$$

$$\text{अथ (३८) प्रक्रमतः कोज्या } \angle पमउ = ज्याआ = \frac{पउ^2 - पम^2 - मउ^2}{२पम.मउ}$$

$$∴ पउ^2 = मप^2 + मउ^2 + २ज्याआ.मप.मउ । \text{ किन्तु}$$

$$पउ = मप + अम - अउ ∴ पउ^2 = (मप + अम - अउ)^2$$

$$= \underline{मप}^2 + \underline{अम}^2 + \underline{अउ}^2 + २पम.अम - २पम.अउ - २अम.अउ$$

$$= मप^2 + मउ^2 + २ज्याआ.मप.मउ$$

$$= मप^2 + (अउ + अम)^2 + २ज्याआ.मप(अउ + अम)$$

$$= \underline{मप}^2 + \underline{अउ}^2 + \underline{अम}^2 + २अउ.अम + २ज्याआ.मप(अउ + अम)$$

$$\therefore २मप.अम - २मप.अउ - २अम.अउ$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप(अउ + अम)$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप.अउ + २ज्याआ.मप.अम$$

$$\therefore २पम.अम - २ज्याआ.मप.अम$$

$$= २अउ.अम + २पम.अउ + २अम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$= ४अउ.अम + २पम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$२अम(मप - ज्याआ.मप)$$

$$= अउ(४अम + २मप + २ज्याआ.मप)$$

$$= २अम.मप(१ - ज्याआ)$$

$$= अउ \{ ४अम + २मप(१ + ज्याआ) \}$$

$$\therefore अउ = \frac{अम.मप(१ - ज्याआ)}{२अम + मप(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{अ.क(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

अस्य गणितम् ।

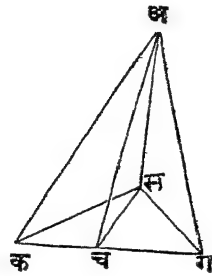
$$चङ्डीनमानम् = अउ = य = \frac{अ.क(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{१०० \times २०० (१ - ३४२०२०१)}{२ \times १०० + २०० (१ + ३४२०२०१)}$$

$$= \frac{२०००० (६५७९७९९)}{२०० + २०० + २०० (३४२०२०१)} = \frac{१३१.५९५९८००}{४.६८४०४०२}$$

$$= २८.०९४५४५ ।$$

(१९) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते कग = सरलप्रदेशः = अ, मअ = वंशः, यस्य मूल-
बिन्दुः = म, अप्रबिन्दुः = अ, कग-प्रदेशस्य मध्यप्रदेशः = च-बिन्दुः ।
 $\angle मकअ = \angle मगअ = आ$ । $\angle मचअ = का$, $\angle कमअ = \angle गमअ$
 $= \angle चमअ = ९०^\circ$, सरलभूमितलोपरि वंशस्य लम्बरूपत्वात् ।

मअ = वंशः = या ।

$\therefore \frac{\text{या.कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}} = \text{कम}$, कमग-त्रिभुजस्य समद्विबाहुकत्वात्

सरलप्रदेशार्धबिन्दुतो वंशमूलपर्यन्तं चमू-रेखा कग-रेखोपरि लम्बरूपा

$$\therefore \text{चम}^2 = \text{कम}^2 - \left(\frac{\text{कग}}{2} \right)^2 = \frac{\text{या}^2 \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ}}{\text{ज्या}^2 \text{आ}} - \frac{\text{कग}^2}{4}$$

$$= \frac{\text{या}^2 \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} \times 4 - \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कग}^2}{4 \text{ज्या}^2 \text{आ}} \quad | \text{अमच-त्रिभुजे}$$

$$\text{चम} = \frac{\text{या} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्याका}} \quad \therefore \text{चम}^2 = \frac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2 \text{का}}{\text{ज्या}^2 \text{का}}$$

$$\therefore \frac{\text{या}^2 \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} \times 4 - \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कग}^2}{4 \text{ज्या}^2 \text{आ}} = \frac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2 \text{का}}{\text{ज्या}^2 \text{का}}$$

$$\therefore \text{या}^2 \cdot 4 \text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{का} - \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{का} \cdot \text{कग}^2$$

$$= \text{या}^2 \times 4 \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{का}$$

$$\therefore \text{या}^2 \cdot 4 \text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{का} - \text{या}^2 \cdot 4 \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{का}$$

$$= ज्या^2 आ.ज्या^2 का.कग^2$$

$$= ४या^2 (कोज्या^2 आ.ज्या^2 का - ज्या^2 आ.कोज्या^2 का)$$

$$= ४या^2 (कोज्याआ.ज्याका + ज्याआ.कोज्याका) \times$$

$$(कोज्याआ.ज्याका - ज्याआ.कोज्याका)$$

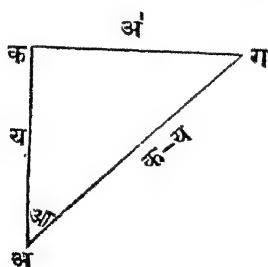
$$= ४या [ज्या(आ + का)] [ज्या(आ - का)]$$

$$\therefore या = \frac{\frac{कग}{२} ज्याआ.ज्याका}{\sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

$$= \frac{\frac{अ}{२} ज्याआ.ज्याका}{२ \sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore चम = दृष्टत्वम् = \frac{अ.कोज्याका.ज्याआ.ज्याका}{२ \sqrt{ज्या(आ + का) ज्या(आ - का)}}$$

(२०) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अ, क, ग त्रीणि स्थानानि कल्प्यन्ते । तत्र अ-स्थानात् क-स्थानं प्राच्यां वर्तते । अ-स्थानात् ग-स्थानं च आ-अंशान्तरे क-स्थानतो दक्षिणभागे अ-हस्तामितान्तरे तिष्ठति । ग-स्थानं प्राप्यमस्ति किन्तु क-स्थानाद् दक्षिणगमनमशक्यमतो ग-स्थानं लिप्सुर्जनः क-स्थानात् अ-स्थानं प्रत्यक् गत्वा आ-अंशान्तरेण चलितो ग-स्थानं लब्धः । अत्र

तस्य चलनप्रदेशः अक + अग = क । अक = य .'. अग = क - य ।

$$(३८ \text{ प्रक्रमतः}) \text{ कोज्याआ} = \frac{य^२ + (क - य)^२ - अ^२}{२य(य - क)}$$

$$.'. २य(क - य) \text{ कोज्याआ} = य^२ + (क - य)^२ - अ^२$$

$$\begin{aligned} \therefore अ^२ &= य^२ + (क - य)^२ - २य(क - य) \text{ कोज्याआ} \\ &= य^२ + क^२ + य^२ - २क.य - २क.य. \text{कोज्याआ} + २य^२. \text{कोज्याआ} \\ &= क^२ + २य^२ + २य^२. \text{कोज्याआ} - (२क.य + २क.य. \text{कोज्याआ}) \\ &= क^२ + २य^२(१ + \text{कोज्याआ}) - २कय(१ + \text{कोज्याआ}) \\ &= क^२ + (२य^२ - २कय)(१ + \text{कोज्याआ}) \end{aligned}$$

$$.'. २य^२ - २कय = \frac{अ^२ - क^२}{१ + \text{कोज्याआ}}$$

$$\begin{aligned} \therefore ४य^२ - ४क.य + क^२ &= \frac{२अ^२ - २क^२ + क^२ + क^२. \text{कोज्याआ}}{१ + \text{कोज्याआ}} \\ &= \frac{२अ^२ - क^२ + क^२. \text{कोज्याआ}}{१ + \text{कोज्याआ}} = \frac{२अ^२ - क^२(१ - \text{कोज्याआ})}{१ + \text{कोज्याआ}} \end{aligned}$$

$$\text{अत्र } १ + \text{कोज्याआ} = २ \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ}$$

$$.'. २य - क = \frac{\sqrt{२अ^२ - क^२} \cdot \frac{१}{२} \text{ उआ}}{\text{कोज्या} \cdot \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

$$.'. य = \frac{१}{२} क + \frac{\sqrt{अ^२ - क^२} \cdot \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२ \text{कोज्या} \cdot \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतदेव क-स्थानात् अ-स्थानस्यान्तरम् ।

$$.'. क - य = \frac{१}{२} क + \frac{\sqrt{अ^२ - क^२} \cdot \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२ \text{कोज्या} \cdot \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतत् अ-स्थानात् ग-स्थानस्यान्तरम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्—

हरिकृष्णदास, मालिक

गुप्तबुर्डीपो, कचौरी गली

बनारस सिटी ।

विज्ञापनम् ।

अस्तु निवेदनं सप्रार्थनं सर्वेषां सज्जनानां पुरतो यदिह कार्यालये वेद-वेदाङ्ग- (व्याकरण-ज्यौतिष-निरुक्त-धर्मशास्त्र-वेदभाष्य-छन्दःशास्त्र) षट्दर्शनपुराणोपपुराणेतिहास-रामायण-काव्य-नाटक-चम्पू-प्रभृति-सर्वविषयकाणि मुम्बयी-पूना-कलिकाता-काशीस्थ-यन्त्रालयेषु समुद्रितानि पुस्तकानि लभ्यन्ते ।

अत्रेदमवगच्छन्तु विद्वांसो यदस्मात् कार्यालयाद्यानि पुस्तकानि प्रेष्यन्ते तेषां प्रत्येकं पत्रं चावलोक्य दैवात् कण्टकादिदोषतो यदि कुत्रापि पत्र-वैकृत्यादि प्राप्यते तदा तत् ततो निरस्य तत्स्थानेऽन्यत् सुदृढं सन्निवेश्य मनोहराकारे समुल्लिखितस्थानेषु समुचितमूल्येनैव सावधानतया पुस्तकानि “भी. पी.” द्वारा प्रेष्यन्ते यथाऽस्मद्ग्राहकाणां कथमपि हानिर्न भवेत् । सकृद्व्यवहारत एव वणिजः सत्यताऽभिलक्ष्यतेऽलमधिकप्रशंसया किन्त्वियं प्रार्थना यत् पुस्तकलिप्सुना स्वनाम-ग्राम-‘पो.आ.-जिला’ एतत् सुस्पष्टं स्वपत्रे लेखनीयम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्

{ श्रीहरिकृष्णदास,
मालिक, “गुप्तबुक्डीपो”
कचौरीगली, बनारस सिटी ।

